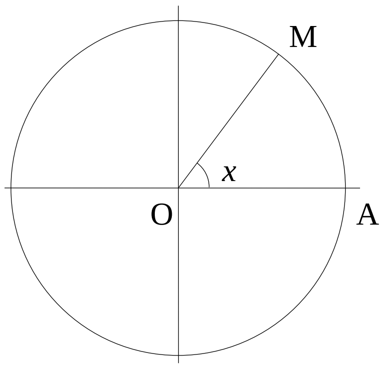
I. Le cercle trigonométrique

Définition.
Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on choisit une orientation : le sens direct ou sens inverse des aiguilles d'une montre.

Remarque.
Dans le cercle trigonométrique de centre O, on considère l'angle $\widehat{AOM} = x$ en degré. L'arc de cercle $\widehat{AM}$ de centre O a une longueur l qui est proportionnel à x.



Angle en degré	360	x
Longueur l	$2\pi\times R=2\pi\times 1=2\pi$	l

donc $l = \frac{2\pi\times x}{360} = \frac{2\pi}{360}\times x$

Définition.
l est appelée la mesure en **radian** de l'angle $\widehat{AOM}$

Propriété.
Les mesures en degré et en radian de l'angle $\widehat{AOM}$ sont proportionnelles.

Angle en degré	0	30°	45°	60°	90°	180°
Angle en radian	0	$\frac{2\pi\times 30}{360}=\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

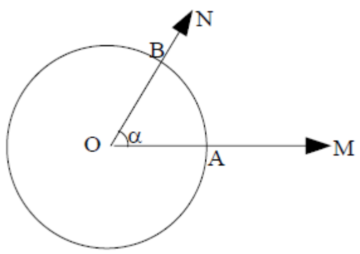
Remarques.
- Chaque point M du cercle est repéré par un nombre qui n'est pas unique, ce nombre correspond à la mesure en radian de l'angle formé par l'axe des abscisses et [OM].
- **2π représente un tour complet** dans le sens direct, -2π un tour complet dans le sens indirect.

$2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$, représente k tours complets, si $k>0$, dans le sens direct et si $k<0$, dans le sens indirect.
- **π représente un demi-tour** dans le sens direct, $-\pi$ un demi-tour dans le sens indirect.

$k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$, représente k demi-tours, si $k>0$, dans le sens direct et si $k<0$, dans le sens indirect.

II. angles orientés

1. Mesures
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Le couple $(\vec{u},\vec{v})$ forme un angle orienté.



Soient O, M et N trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{ON}$
Soit C le cercle trigonométrique. La demi-droite $[OM)$ coupe C en A. La demi-droite $[ON)$ coupe C en B.

On obtient une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, en calculant la longueur parcourue sur le cercle pour aller de A à B et en lui donnant un signe représentant le sens de parcours.

Si la mesure en radians de $\widehat{AOB}$ est a, les mesures de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ sont de la forme $a + 2k\pi$ ou $-a + 2k\pi$ selon le sens de parcours pour aller de A à B, k étant un entier relatif.

Exemple
OAB est un triangle équilatéral.
La mesure de $\widehat{AOB}$ en radians est donc $\frac{\pi}{3}$.
L'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ a comme mesures possibles : …., $\frac{\pi}{3} - 2\pi = \frac{-5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$, …
L'angle orienté $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right)$ a comme mesures possibles :…, $-\frac{\pi}{3} - 2\pi = \frac{-7\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$, …

2. Mesure principale d'un angle orienté

Parmi toutes les mesures d'un angle orienté, une seule se trouve dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ elle est appelée mesure principale de l'angle orienté.
Si a est la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$, alors |a| est la mesure en radian de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.
Exemple
Trouver la mesure principale d'un angle dont l'une des mesures est $\frac{11\pi}{3}$
Comme $\frac{11\pi}{3} > \pi$, on retire des multiples de 2π jusqu'à obtenir un résultat contenu dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.
$\frac{11\pi}{3} - 2\pi = \frac{5\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3} - 2\pi = \frac{-\pi}{3}$, comme $\frac{-\pi}{3} \in]-\pi; \pi]$ il s'agit de la mesure principale de l'angle.

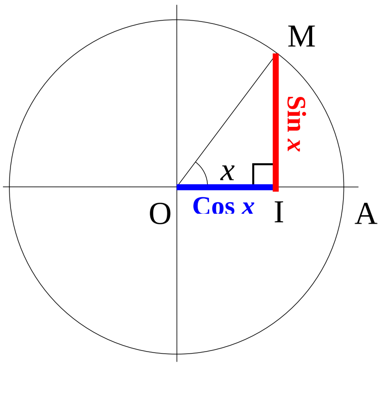
3. Propriétés des angles orientés

Angles et vecteurs colinéaires
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est égale à 0 ou à π.
Si cette mesure est 0, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ v ont le même sens, il existe un réel positif k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$
Si cette mesure est π, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont des sens opposés, il existe un réel négatif k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.
Relation de Chasles
Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$.
Conséquences :
$(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$; $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$;
$(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$; $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$.

III. Cosinus et sinus d'un angle

On place le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé $\left(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'origine le centre du cercle et tel que l'angle 0 corresponde au 1 de l'axe des abscisses.
On considère un angle x et M le point du cercle tel que $\widehat{AOM} = x$.
$\cos x = \frac{adjacent}{hypoténuse} = \frac{x_M}{1} = x_M$ l'abscisse du point M.
$\sin x = \frac{\text{opposŽ}}{hypoténuse} = \frac{y_M}{1} = y_M$ l'ordonnée du point M.

Alors, les coordonnées de M en fonction de x sont : M(cos x; sin x)



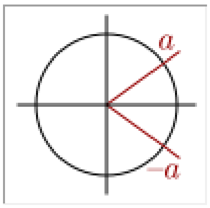
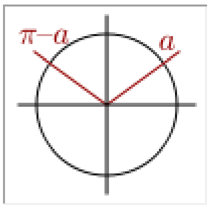
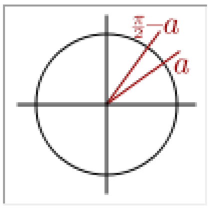
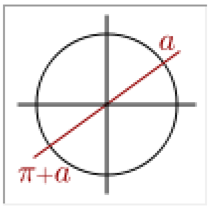
Propriétés.

- $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, 2π correspond à un tour complet, les coordonnées sont identiques.
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $k \in \mathbb{Z}$. $2k\pi$ correspond à k tours complets, les coordonnées ne sont pas changées.

Tableau de synthèse.

Angle x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Tan x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non défini	0

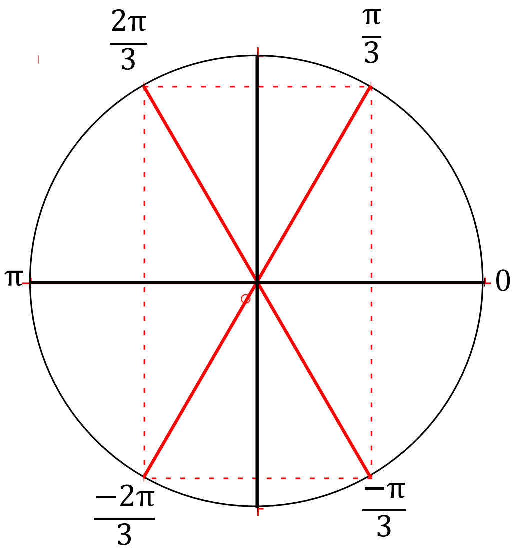
Propriétés des arcs associés On les montre aisément, à l'aide de symétries.

$\cos(-a) = \cos(a)$ $\sin(-a) = -\sin(a)$		$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$ $\sin(\pi - a) = \sin(a)$	
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$		$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$ $\sin(\pi + a) = -\sin(a)$	

Méthode.
En considérant le dénominateur on determine l'angle fondamental en rapport, puis on regarde quelle est la symétrie utilisée .

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\quad \cos\frac{-\pi}{3} = \frac{1}{2}$ mais $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ $\quad \cos\frac{-2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ mais $\sin\frac{-\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin\frac{-2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



Exemples.

▶ 1. Déterminer $\cos\frac{5\pi}{6}$, $\sin\frac{-3\pi}{4}$, $\sin\frac{3\pi}{2}$ et $\cos\frac{-\pi}{6}$ en illustrant avec un dessin.

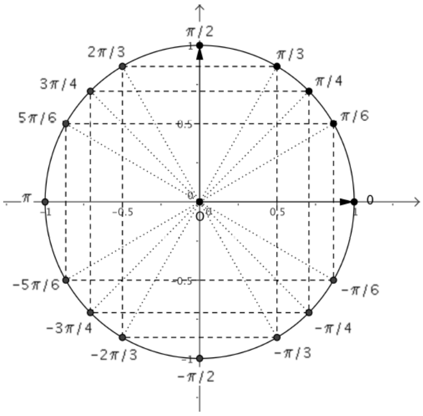
$\cos\frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{-3\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$ et $\cos\frac{-\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

►2. Soit $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ tel que $\cos x = \frac{2}{3}$. Déterminer $\sin x$ et $\tan x$.

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\frac{4}{9} + \sin^2 x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x = \frac{5}{9}$

$\Leftrightarrow \quad \sin x = \sqrt{\frac{5}{9}}$ ou $\sin x = -\sqrt{\frac{5}{9}}$.

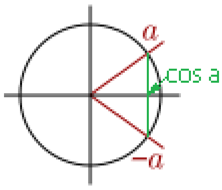
Ici on a $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ donc on est dans les cadrans 3 et 4 et donc le sinus est nécessairement négatif et donc $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, de plus $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$



Equations trigonométriques

Propriété :

L'équation $\cos(x) = \cos(a)$ a pour solutions les nombres réels $x = a + 2k\pi$ et $x = -a + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$



Propriété :

L'équation $\sin(x) = \sin(a)$ a pour solutions les nombres réels $x = a + 2k\pi$ et $x = \pi - a + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

III. Fonctions cosinus et sinus

Ensemble de définition.

Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

Parité des fonctions.

Pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin x$, la fonction sinus est impaire. La courbe de la fonction $x \mapsto \sin x$ est symétrique par rapport à l'origine.

Pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos x$, la fonction cosinus est paire. La courbe de la fonction $x \mapsto \cos x$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Périodicité des fonctions.

Définition. Fonction périodique

On dit que f est **T–périodique** lorsqu'il existe un nombre réel T tel que $f(x + \mathrm{T}) = f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{D}_f$ et $x + \mathrm{T} \in \mathrm{D}_f$.

Remarque.

La courbe d'une fonction T–périodique dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ se répète par translation de vecteur $\mathrm{T}\vec{i}$.

Exemple.

Pour tout réel x, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, la fonction sinus est 2π–périodique.
Pour tout réel x, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, la fonction cosinus est 2π–périodique.

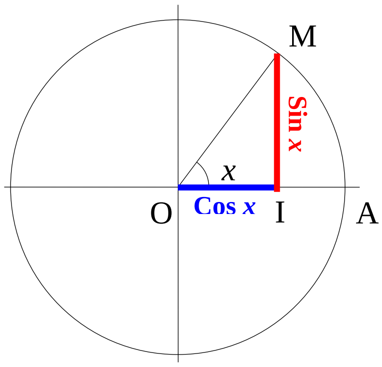
Variations des fonctions.

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π–périodique, il suffit donc des les étudier entre $-\pi$ et π. De plus, sinus est impaire et cosinus est paire, on peut donc encore restreindre l'étude à l'intervalle $[0,\pi]$. Le reste se complètera par symétrie et translation.

Sur le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère un angle $x \in [0,\pi]$ et M le point du cercle tel que $\widehat{AOM} = x$.

cos x est l'abscisse de M.

x	0		π
Cos x	1	↘	-1



sin x est l'ordonnée de M.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Sin x	0	↗	1	↘	0