Devoir maison

pour le 10/02/12

Quelques mots d'histoire.

Le problème d'approximation de fonctions par des fonctions affines et plus généralement par des fonctions polynômes est une composante majeure de ce que l'on nomme l'analyse numérique. Les applications de ce problème sont nombreuses en mathématiques appliquées, en économie…

L'objectif est de trouver des valeurs approchées d'une fonction que l'on connaît peu, c'est-à-dire dont on a les valeurs en quelques points par exemples, en connaissant l'erreur commise. Cette recherche de l'erreur est vraiment un point essentiel en mathématiques appliquées.

Quelques grands noms de cette branche des mathématiques sont : LAGRANGE, EULER, NEWTON, TCHEBYCHEFF et WEIERSTRASS. Ce dernier a démontré un théorème essentiel, qui dépasse de loin le cadre du programme du lycée (vous le verrez peut-être en maths spé. ou en fac.) et qui sous forme simplifiée montre que les fonctions dites continues peuvent être approchées par des fonctions polynômes (vous aurez la définition de la continuité en TS, en gros ce sont des fonctions dont la courbe n'a pas de coupure).

Dans ce DM, nous allons voir que l'on peut trouver de bonnes approximations affines de certaines fonctions en quelques valeurs. Au travail !

Partie I : Généralités sur les approximations affines

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant un réel a.

Une approximation affine de f en a, est une fonction affine g associée à une droite passant par $A(a; f(a))$

1) Si on pose m le coefficient directeur de la droite représentative de la fonction g, donnez l'expression générale de celle-ci en fonction de x, m, a et $f(a)$.
2) Calculez $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x))$. Interprétez graphiquement ce résultat, en faisant abstraction de la définition de l'approximation affine.
3) On pose maintenant $x = a + h$, donner une nouvelle expression de $g(a + h)$, en fonction de h, m, a et $f(a)$.

Partie II : Premier exemple : approximation affine de $f(x) = \frac{1}{x}$ en 1.

f est la fonction définie sur$\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$

1) Déterminer g une approximation affine de $f(1 + h)$ pour h proche de 0, associée à la fonction f.
2) Le but de la suite est de comparer g et $y = -h + 1$ une autre approximation affine de $f(1 + h)$
   a. A l'aide de géogébra tracer la courbe représentative de f, de g, et de $y = -h + 1$ (il faudra adapter cette dernière équation car géogébra ne connait que x et non h). Imprimez et collez votre figure.
   b. Comparez l'écart entre les trois courbes quand on prend des abscisses proches de 1.
   c. A votre avis si l'on veut une valeur approchée de $f(1 + h)$ vaut il mieux utiliser g *ou* et $y = -h + 1$

Pour évaluer la pertinence/ précision d'une approximation affine on étudiera (encadrera) l'écart entre la fonction et son approximation affine quand h est petit.

3) Soit $h \leq \frac{1}{2}$, on va démonter en plusieurs étapes que dans ces conditions $0 \leq \frac{1}{1+h} - (1 - h) \leq 2h^2$
   a. Pour cela montrer que $\frac{1}{1+h} - (1 - h) = \frac{h^2}{1+h}$
   b. Montrer alors que $\frac{1}{1+h} - (1 - h) \geq 0$
   c. Puis que $\frac{1}{1+h} - (1 - h) \leq 2h^2$ *(écrivez $\frac{h^2}{1+h} = h^2 \frac{1}{1+h}$ et majorez $\frac{1}{1+h}$, autrement dit trouvez un nombre toujours plus grand que lui)*
4) Dans chaque cas, calculer grâce à l'approximation affine $y = -h + 1$une valeur approchée du nombre indiqué et un majorant de l'erreur.
   i. $\frac{1}{1{,}003}$ ii. $\frac{1}{0{,}98}$ iii. $\frac{1}{0{,}991}$

La droite donnant la meilleure approximation est celle qui sera collée au plus prés de la courbe, autrement dit la tangente. Donc de tous les coefficients directeurs m possibles, le meilleur sera $f'(a)$

Partie III : D'autres exemples

1) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = x^3.
   a. Déterminer l'approximation affine $g(h)$ de $f(1 + h)$ pour h proche de 0, associée à la fonction f.
   b. Démontrer que si $-1 \leq h \leq 1$ alors :$0 \leq (1 + h)^3 - g(h) \leq 4h^2$
   c. Dans chaque cas, calculer grâce à l'approximation affine associée, une valeur approchée du nombre indiqué et un majorant de l'erreur. i. $1{,}004^3$ ii. $0{,}98^3$ iii. $0{,}991^3$

On peut se demander quel est l'intérêt de telles approximations, ils sont en fait économiques en termes de calculs et permettent de travailler sans calculatrice.

2) Sans machine et en utilisant la meilleur approximation affine possible donnez des approximation des nombres suivants :
   a. $2{,}01^{10}$
   b. $\sqrt{3{,}998}$