Chapitre 3

# Dérivation. Etudes de fonctions.

## I Notion de limite

Cadre :
Soit a un réel, f une fonction définie au moins sur un intervalle contenant a, ou un intervalle de borne a (type ]… ; a[ ou ]a ;…[)

**Définition intuitive**
Nous dirons que « f admet pour limite l lorsque x tend vers a » (ou en raccourci : « f admet la limite l en a ») si au sens intuitif, f(x) est aussi proche du réel l que l'on veut dès que x est assez proche de a.
Dans ce cas nous notons : $\lim_{x\to a} f(x) = l$

**Cas simple : fonction usuelle définie en a**
On appellera fonction usuelles les sommes produits et quotients de fonctions polynomiale, racines et trigonométriques.

**Propriété**
Lorsque f est une fonction usuelle définie en a , alors $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

**Cas plus complexe : la fonction n'est pas définie en a**
**Propriété**
Soit f une fonction non définie en a.
Si pour $x \neq a$, f(x)=g(x), où g est une fonction usuelle définie en a, alors f admet une limite en a, et $\lim_{x\to a} f(x) = g(a)$

**Remarque :**
dans la plus part des exercices de calculs de limite on cherchera une fonction g(x) , puis on calculera g(a)

**Exemple :**
Soit $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ définie sur $D_f = ]-1;0[\cup]0;+\infty[$
On cherche $\lim_{x\to 0} f(x)$
$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \times \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1+x-1^2}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{(\sqrt{1+x}+1)}$
Si on pose $g(x) = \frac{1}{(\sqrt{1+x}+1)}$ et on a donc $\forall x \in D_f\ f(x) = g(x)$ et g(0) existe $g(0) = \frac{1}{2}$
On aura donc $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$

**Théorème (admis)**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

**Théorème**
**Soit f et g deux fonctions vérifiant :** $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim_{x\to a} g(x) = l'$
Alors : $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = l + l'$
$\lim_{x\to a} kf(x) = kl$
$\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = ll'$
Si de plus $l' \neq 0$ : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$

# II Nombre Dérivé – Tangente

**Définition**

Le taux de variation de la fonction f entre $a$ et , avec $a \neq b$, est le quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Avec $b = a + h$, $h \neq 0$, ce quotient s'écrit aussi $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

**Exemple** (en rapport avec l'activité d'introduction):

Soit f la fonction définie pour tout réel positif par : $f(x) = 100 - 5x^2$

Soient A et B les points d'abscisses 1 et 4, leurs ordonnées respectives sont donc :

……

Le taux de variation de la fonction f entre 1 et 4 sera $\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{80-95}{3} = -5$

**Remarque**

D'après le cours de 2nde $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = -5$, le taux de variation n'est autre que le coefficient directeur de la droite (AB).

**Propriété**

Soit C la courbe représentative de f, A et B deux points distincts de cette courbe d'abscisses respectives a et b, alors le taux de variation entre a et b : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le coefficient directeur de la droite (AB).

Comme nous avons pu le voir dans l'activité , plus B se rapproche de A (autrement dit plus h se rapproche de 0), plus la droite (AB) se rapproche d'une droite particulière, n'ayant qu'un point de contact (local) avec la courbe en A.

**Définition**

Supposons que pour les valeurs de $h$ de plus en plus proche de zéro, avec $h \neq 0$, les nombres $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ deviennent de plus en plus proche d'un nombre fixé $l$.

Nous dirons alors que la fonction $f$ est dérivable en a et que $l$ est le nombre dérivé de $f$ en a.

Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$ et il vaut $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

**Exemple**

On considère la fonction $f$ de l'exemple précédent. Et a = 1

Alors $f(1+h) = 100 - 5(1+h)^2 = 100 - 5(1+2h+h^2) = 95 - 10h - 5h^2$

Et $f(1) = 100 - 5 \times 1^2 = 95$ donc $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{95-10h-5h^2-95}{h} = \frac{-10h-5h^2}{h} = -10 - 5h$ donc quand h se rapproche de 0 , le taux de variation se rapproche de -10.

On a donc $f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} -10 - 5h = -10$

**Définition**

Soit f une fonction et C sa courbe représentative.

La droite Δ qui passe par le point A et dont le coefficient directeur est $l = f'(a)$ est la tangente en A à la courbe C

**Exemple**

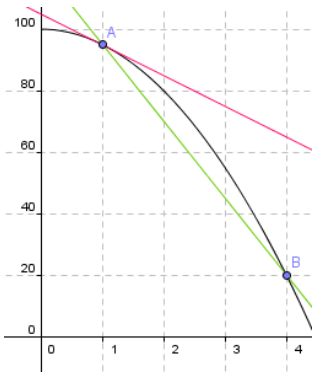
Pour la tangente Δ en A à la courbe des exemples précédents, son coefficient directeur est -10.

Son équation est donc $y = -10x + p$

Pour déterminer l'ordonnée à l'origine , je garde en tête que cette droite passe par A$(1, f(1))$ avec $f(1) = 95$

Et on a donc $95 = -10 \times 1 + p$ et donc $p = 105$.

Notre tangente a donc pour équation $y = -10x + 105$



# III Dérivées de fonctions usuelles

**Définition**

$f$ est une fonction dérivable en tout point $x$ d'un intervalle I inclus dans son ensemble de définition.
Alors la fonction $x \to f'(x)$, notée $f'$ est appelée fonction dérivée de f sur I.

**Propriété**

Dans le tableau ci-dessous sont compilées des fonctions de base et leur dérivées

| Fonction | Dérivée |
|---|---|
| $f(x) = k$ | $f'(x) = 0$ |
| $f(x) = x$ | $f'(x) = 1$ |
| $f(x) = ax + b$ | $f'(x) = a$ |
| $f(x) = x^2$ | $f'(x) = 2x$ |
| $f(x) = x^3$ | $f'(x) = 3x^2$ |
| $f(x) = \frac{1}{x}$ | $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $f(x) = x^n \; n \in \mathbb{Z}$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ |

On peut demander aux élèves de démontrer ces formules sauf les deux dernières (racine peut tout de même se traiter avec la quantité conjuguée).

# IV Opérations

**Propriété**

Soit $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux fonctions dérivables sur I et k un réel ,

alors les fonctions k u , u + v et u . v sont dérivables sur I et on a : $\begin{cases} (\boldsymbol{ku})' = \boldsymbol{k\,u'} \\ (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u'}+\boldsymbol{v'} \\ (\boldsymbol{u\,v})' = \boldsymbol{u'v}+\boldsymbol{u\,v'} \end{cases}$

Si la fonction de plus $\boldsymbol{v}$ ne s'annule pas sur I, les fonctions $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{v}}$ et $\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}$ sont dérivables sur I et : $\begin{cases} \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{v}}\right)' = -\frac{\boldsymbol{v'}}{\boldsymbol{v^2}} \\ \left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u'v-uv'}}{\boldsymbol{v^2}} \end{cases}$

**Exemples**

## V Applications aux variations d'une fonction

**Propriété**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I,

- Si $f'$ est nulle sur I, alors $f$ est constante sur I.
- Si $f'$ est positive ou nulle sur I, alors $f$ est croissante sur I.
- Si $f'$ est négative ou nulle sur I, alors $f$ est décroissante sur I.

Pour démontrer qu'une fonction $f$ est **strictement croissante** sur I, il suffit de démontrer que $f$ est dérivable sur I et que sa dérivée $f'$ est strictement positive sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points.

(Propriété similaire pour une fonction strictement décroissante)

**Définition**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

$f(a)$ est le maximum de f sur I signifie que pour tout x de I, $f(x) \leq f(a)$.

$f(a)$ est le minimum de f sur I signifie que pour tout x de I, $f(x) \geq f(a)$.

**Définition**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et c un point distinct de ses extrémités.

Dire que la fonction f admet un maximum local en c signifie que pour tout x d'un intervalle ouvert contenant c et inclus dans I on a : $f(x) \leq f(c)$

Dire que la fonction f admet un minimum local en c signifie que pour tout x d'un intervalle ouvert contenant c et inclus dans I on a : $f(x) \geq f(c)$

**Propriété**

• Si $f$ est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et si $f$ admet un maximum ou un minimum en $x_0 \in I$ avec $x_0$ distinct des extrémités de I, alors $f'(x_0) = 0$.

• Si $f'$ s'annule en $x_0$ en changeant de signe, alors $f$ admet en $x_0$ un extremum local.