Limites (correction)

Exercice 1

Déterminer pour chaque cas la limite de f(x) au point a = 2.

a) $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$ b) $f(x) = \frac{3x-1}{x+5}$ c) $f(x) = (3x-1)^3$ d) $f(x) = 5\cos(x)$

Ces fonctions sont toutes définies en 2 donc il suffit à chaque fois de calculer f(2)

a) $\lim_{x\to 2} f(x) = 4 - \sqrt{2}$ b) $\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{6-1}{2+5} = \frac{5}{7}$ c) $\lim_{x\to 2} f(x) = 5^3 = 125$ d) $\lim_{x\to 2} f(x) = 5\cos(2)$

Exercice 2

Après avoir simplifié f(x) pour $\neq a$, déterminer les limites suivantes.

a) Pour $x \neq 2, \frac{x^2+6x-16}{x-2} = \frac{(x-2)(x+8)}{x-2} = x + 8$ donc $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+6x-16}{x-2} = \lim_{x\to 2} x + 8 = 10$

b) $x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ donc $\frac{x^4-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x+1} = (x-1)(x^2+1)$

$\lim_{x\to -1} \frac{x^4-1}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x-1)(x^2+1) = -4$

c) $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ donc $\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = (x^2+x+1)$

$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x^2 + x + 1 = 3$

d) $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ donc $\frac{x^2+x-2}{x-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = (x+2)$

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+2) = 3$

e) $\frac{x-7}{\sqrt{x}-\sqrt{7}} = \frac{(x-7)(\sqrt{x}+\sqrt{7})}{(\sqrt{x}-\sqrt{7})(\sqrt{x}+\sqrt{7})} = \frac{(x-7)(\sqrt{x}+\sqrt{7})}{(\sqrt{x}-\sqrt{7})(\sqrt{x}+\sqrt{7})} = \frac{(x-7)(\sqrt{x}+\sqrt{7})}{(x-7)} = (\sqrt{x}+\sqrt{7})$

$\lim_{x\to 7} \frac{x-7}{\sqrt{x}-\sqrt{7}} = \lim_{x\to 7}(\sqrt{x}+\sqrt{7}) = 2\sqrt{7}$

f) $\frac{\sin(x)+3x}{5x} = \frac{1}{5}\frac{\sin(x)}{x} + \frac{3}{5}$ de plus $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)+3x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{5}\frac{\sin(x)}{x} + \frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$

h) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\frac{x}{\sin(x)} = \frac{1}{\frac{\sin(x)}{x}}$

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin(x)}{x}} = \frac{1}{1} = 1$

i) $\frac{(1+2x)^3-1}{x} = \frac{1+6x+12x^2+8x^3-1}{x} = 6 + 12x + 8x^2$

$\lim_{x\to 0} \frac{(1+2x)^3-1}{x} = \lim_{x\to 0} 6 + 12x + 8x^2 = 6$

j) $\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{(\sqrt{x+3}+2)}$

$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{4}$

Exercice 3

Soit $f(x) = \frac{(1+6x^{10})^2-1}{x^{10}}$

1) A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de $f(0{,}1), f(0{,}01), f(0{,}001)$. Conjecturez alors la limite de f en 0.

La calculatrice me donne $f(0{,}1) = 12$ et $f(0{,}01) = f(0{,}001) = 0$ on peut penser que la limite sera 0

2) Simplifiez $f(x)$, puis calculer cette limite. Alors ?

$\frac{(1+6x^{10})^2-1}{x^{10}} = \frac{1+12x^{10}+36x^{20}-1}{x^{10}} = \frac{12x^{10}+36x^{20}}{x^{10}} = 12 + 36x^{10}$

$\lim_{x\to 0} \frac{(1+6x^{10})^2-1}{x^{10}} = \lim_{x\to 0} 12 + 36x^{10} = 12$

3) Expliquez les résultats obtenus en 1).

En fait quand la calculatrice fait $1 + 6x^{10}$ avec x valant 0,01 et les nombres plus petits elle fait une approximation qui fausse les calculs $1 + 6 \times 0{,}01^{10}$=1,000 000 000 000 000 000 06 la calculatrice arrondit cette valeur à 1 d'où le numérateur qui sera faussement considéré comme valant 0 et les résultats en découlant

Elle moins d'une quinzaine de chiffres consécutifs constituants le nombre en mémoire pour ces calculs.