Fonction dérivée

Les fonctions des exercices suivants seront définies et dérivable sur un intervalle J. Celui sera égal à $\mathbb{R}$ sauf mention contraire.

Exercice 1

En utilisant les formules $(u+v)' = u' + v'$ et $(ku)' = k\,u'$ dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^2 + 5x - 4$ b) $f(x) = 8x^4 - 3x^2 - \frac{1}{3}x + 7$

c) $f(x) = \frac{8x^7}{7} - 9x + \frac{x^4}{5}$ d) $f(x) = \frac{8}{x} - 9x + 4\sqrt{x}$ $J = \mathbb{R}_+^*$

e) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$ $J = \mathbb{R}^*$ f) $f(x) = -\frac{11}{x^8} + \frac{7}{x^{11}} + \frac{3}{x^5}$ $J = \mathbb{R}^*$

g) $f(x) = \frac{8}{x^4} - \frac{1}{3x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{7}{2x}$ h) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{4} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{8}{9x^9}$ $J = \mathbb{R}_+^*$

Exercice 2

En utilisant la formule $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ et les formules de l'exercice précédent dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{1}{5x-4}$ $J =]\frac{4}{5};+\infty[$ b) $f(x) = \frac{3}{8x^4+7}$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $J =]0;+\infty[$ d) $f(x) = \frac{9}{x^2-x-6}$ $J =]-\infty;-2[$

Exercice 3

1) En utilisant la formule $(uv)' = u'v + uv'$ et les formules de l'exercice 1 dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^3(4x-5)$ b) $f(x) = (5x-7)(x^2+1)$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)$ d) $f(x) = (3x^2 + 5x - 4)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$

e) $f(x) = x\sqrt{x}$ g$(x) = x^2\sqrt{x}$ $h(x) = x^n\sqrt{x}$ $J = \mathbb{R}^+$

2) En utilisant aussi la formule de l'exercice 2 dériver la fonction : $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

J n'est pas précisé mais on sait que$g$ et h sur cet intervalle et h non nulle sur lui.

Exercice 4

En utilisant la formules $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ et les formules précédentes dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{5x-3}{4x-5}$ $J =]\frac{5}{4};+\infty[$ b) $f(x) = \frac{(5x-7)}{(x^2+1)}$

c) $f(x) = \frac{-3x+13}{2x+3}$ J est à définir d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$ $J = \mathbb{R}_+^*$

e) $f(x) = \frac{3x-4}{x^2-2x-35}$ J est à définir f) $f(x) = \frac{(3x^2+5x-4)}{x^2}$ J est à définir

post DM (avec cos sinus et tan

correction page suivante

Corrections

Exercice 1

Pour gérer les dérivées de fonctions simples ne reposant que sur les formules $(u+v)'=u'+v'$ et $(ku)'=k\,u'$ il n'y a pas de justification demandées. Toutefois il faudra des fois adapter l'écriture pour que le « k » soit bien apparent avant de dériver.

a) $f(x)=3x^2+5x-4$

$f'(x)=3\times 2x+5=6x+5$

b) $f(x)=8x^4-3x^2-\frac{1}{3}x+7$

$f'(x)=8\times 4x^3-3\times 2x-\frac{1}{3}$

$=32x^3-6x-\frac{1}{3}$

c) $f(x)=\frac{8x}{7}-9x+\frac{x^4}{5}$

$=\frac{8}{7}x^7-9x+\frac{1}{5}x^4$

$f'(x)=\frac{8}{7}7x^6-9+\frac{1}{5}4x^3$

$=8x^6-9+\frac{4}{5}x^3$

d) $f(x)=\frac{8}{x}-9x+4\sqrt{x}$

$=8\frac{1}{x}-9x+4\sqrt{x}$

$f'(x)=8\frac{-1}{x^2}-9+4\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$=\frac{-8}{x^2}-9+\frac{2}{\sqrt{x}}$

e) $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}$

$f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{-2}{x^3}+\frac{-3}{x^4}+\frac{-4}{x^5}$

f) $f(x)=-\frac{11}{x^8}+\frac{7}{x^{11}}+\frac{3}{x^5}$

$=-11\frac{1}{x^8}+7\frac{1}{x^{11}}+3\frac{1}{x^5}$

$f'(x)=-11\frac{-8}{x^9}+7\frac{-11}{x^{12}}+3\frac{-5}{x^6}$

$=\frac{88}{x^9}-\frac{77}{x^{12}}-\frac{15}{x^6}$

g) $f(x)=\frac{8}{x^4}-\frac{1}{3x^2}+\frac{5}{x^3}+\frac{7}{2x}$

$=8\frac{1}{x^4}-\frac{1}{3}\frac{1}{x^2}+5\frac{1}{x^3}+\frac{7}{2}\frac{1}{x}$

$f'(x)=8\frac{-4}{x^5}-\frac{1}{3}\frac{-2}{x^3}+5\frac{-3}{x^4}+\frac{7}{2}\frac{-1}{x^2}$

$=\frac{-32}{x^5}+\frac{2}{3x^3}-\frac{15}{x^4}+\frac{-7}{2x^2}$

h) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{4}+\frac{2}{3}x^3-\frac{8}{9x^9}$

$=\frac{1}{4}\sqrt{x}+\frac{2}{3}x^3-\frac{8}{9}\frac{1}{x^9}$

$f'(x)=\frac{1}{4}\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{2}{3}3x^2-\frac{8}{9}\frac{-9}{x^{10}}$

$=\frac{1}{8\sqrt{x}}+2x^2+\frac{8}{x^{10}}$

Exercice 2

En utilisant la formule $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$ et les formules de l'exercice précédent dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x)=\frac{1}{5x-4}$ $\quad J=]\frac{4}{5};+\infty[$

je reconnais $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x)=5x-4$ et $u'(x)=5$ ainsi : $f'(x)=\frac{-5}{(5x-4)^2}$

b) $f(x)=\frac{3}{8x^4+7}=3\frac{1}{8x^4+7}$

je reconnais $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x)=8x^4+7$ et $u'(x)=8\times 4x^3=32x^3$ ainsi :

$f'(x)=3\;\frac{-32x^3}{(8x^4+7)^2}$

c) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad J=]0;+\infty[$

je reconnais $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x)=\sqrt{x}$ et $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ainsi :

$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{x}=\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$

d) $f(x)=\frac{9}{x^2-x-6}=9\frac{1}{x^2-x-6}$ $\quad J=]-\infty;-2[$

je reconnais $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x)=x^2-x-6$ et $u'(x)=2x-1=32x^3$

ainsi : $f'(x)=9\;\frac{-(2x-1)}{(x^2-x-6)^2}=9\;\frac{-2x+1}{(x^2-x-6)^2}=\frac{-18x+9}{(x^2-x-6)^2}$

Exercice 3

1) En utilisant la formule $(uv)'=u'v+uv'$ et les formules de l'exercice 1 dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x)=x^3(4x-5)$

je reconnais $(uv)'=u'v+uv'$ avec :

$u(x)=x^3$, $u'(x)=3x^2$, $v(x)=(4x-5)$, $v'(x)=4$

ainsi : $f'(x)=3x^2(4x-5)+x^3 4=12x^3-15x^2+4x^3=16x^3-15x^2$

$=x^2(16x-15)$

b) $f(x)=(5x-7)(x^2+1)$

je reconnais $(uv)'=u'v+uv'$ avec :

$u(x)=(5x-7)$, $u'(x)=5$, $v(x)=(x^2+1)$, $v'(x)=2x$

ainsi : $f'(x)=5(x^2+1)+(5x-7)2x=5x^2+5+10x^2-14x$

$=15x^2-14x+5$

c) $f(x)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)$

je reconnais $(uv)'=u'v+uv'$ avec :

$u(x)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$, $u'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{-2}{x^3}$, $v(x)=\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)$, $v'(x)=\frac{-3}{x^4}+\frac{-4}{x^5}$

ainsi : $f'(x)=\left(\frac{-1}{x^2}+\frac{-2}{x^3}\right)\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{-3}{x^4}+\frac{-4}{x^5}\right)$

$= \frac{-1}{x^5} + \frac{-1}{x^6} + \frac{-2}{x^6} + \frac{-2}{x^7} + \frac{-3}{x^5} + \frac{-4}{x^6} + \frac{-3}{x^6} + \frac{-4}{x^7} = \frac{-4}{x^5} + \frac{-10}{x^6} + \frac{-6}{x^7}$

$= \frac{-4x^2}{x^7} + \frac{-10x}{x^7} + \frac{-6}{x^7} = \frac{-4x^2-10x-6}{x^7}$ on vient de préparer l'étude du signe de la dérivée.

e) $f(x) = x\sqrt{x}$

je reconnais $(uv)' = u'v + uv'$ avec :

$u(x) = x$, $u'(x) = 1$, $v(x) = \sqrt{x}$, $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ainsi : $f'(x) = 1\sqrt{x} + x\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1\sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{2\sqrt{x\sqrt{x}}} = \frac{2}{2}\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

g$(x) = x^2\sqrt{x}$

je reconnais $(uv)' = u'v + uv'$ avec :

$u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$, $v(x) = \sqrt{x}$, $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ainsi : $g'(x) = 2x\sqrt{x} + x^2\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x}{2}\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x\sqrt{x}}} = \frac{4x}{2}\sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{2} = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$

$h(x) = x^n\sqrt{x}$ $\qquad J = \mathbb{R}^+$

je reconnais $(uv)' = u'v + uv'$ avec :

$u(x) = x^n$, $u'(x) = nx^{n-1}$, $v(x) = \sqrt{x}$, $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ainsi : $h'(x) = nx^{n-1}\sqrt{x} + x^n\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2nx^{n-1}}{2}\sqrt{x} + \frac{x^n\sqrt{x}}{2\sqrt{x\sqrt{x}}} = \frac{2nx^{n-1}}{2}\sqrt{x} + \frac{x^{n-1}\sqrt{x}}{2}$

$= \frac{2n+1}{2}x^{n-1}\sqrt{x}$

2) $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = g(x)\frac{1}{h(x)}$

je reconnais $(uv)' = u'v + uv'$ avec :

$u(x) = g(x)$, $u'(x) = g'(x)$, $v(x) = \frac{1}{h(x)}$, $v'(x) = \frac{-h'(x)}{h^2(x)}$

ainsi : $f'(x) = g'(x)\frac{1}{h(x)} + g(x)\frac{-h'(x)}{h^2(x)} = g'(x)\frac{h(x)}{h^2(x)} - g(x)\frac{h'(x)}{h^2(x)}$

$= \frac{g'(x)h(x)}{h^2(x)} - \frac{g(x)h'(x)}{h^2(x)} = \frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{h^2(x)}$ ou encore $f' = \frac{g'h-gh'}{h^2}$

Exercice 4

En utilisant la formules $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ et les formules précédentes dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{5x-3}{4x-5}$ $\qquad J =]\frac{5}{4};+\infty[$

je reconnais $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$avec : $u(x) = 5x-3$, $u'(x) = 5$, $v(x) = 4x-5$, $v'(x) = 4$

ainsi : $f'(x) = \frac{5(4x-5)-(5x-3)4}{(4x-5)^2} = \frac{20x-25-(20x-12)}{(4x-5)^2} = \frac{20x-25-20x+12}{(4x-5)^2} = \frac{-13}{(4x-5)^2}$

b) $f(x) = \frac{(5x-7)}{(x^2+1)}$

je reconnais $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec :

$u(x) = 5x-7$, $u'(x) = 5$, $v(x) = x^2+1$, $v'(x) = 2x$ ainsi :

$f'(x) = \frac{5(x^2+1)-(5x-7)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{5x^2+5-(10x^2-14x)}{(x^2+1)^2} = \frac{5x^2+5-10x^2+14x}{(x^2+1)^2} = \frac{-5x^2+14x+5}{(x^2+1)^2}$

c) $f(x) = \frac{-3x+13}{2x+3}$ $\qquad J = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

je reconnais $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec :

$u(x) = -3x+13$, $u'(x) = -3$, $v(x) = 2x+3$, $v'(x) = 2$

ainsi : $f'(x) = \frac{-3(2x+3)-(-3x+13)2}{(2x+3)^2} = \frac{-6x-9-(-6x+26)}{(2x+3)^2} = \frac{-6x-9+6x-26}{(2x+3)^2} = \frac{-31}{(2x+3)^2}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$ $\qquad J = \mathbb{R}_+^*$

je reconnais $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec :

$u(x) = \sqrt{x}$, $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $v(x) = x^2+1$, $v'(x) = 2x$

ainsi : $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+1)-\sqrt{x}\,2x}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)-2xx}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2} = \frac{(-x^2+1)\sqrt{x}}{2x(x^2+1)^2}$

e) $f(x) = \frac{3x-4}{x^2-2x-35}$

pour définir J il faut chercher les racines du dénominateur avec Δ. On trouve -5 et 7 et donc $J = \mathbb{R} - \{-5;7\}$

je reconnais $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec :

$u(x) = 3x-4$, $u'(x) = 3$, $v(x) = x^2-2x-35$, $v'(x) = 2x-2$

ainsi : $f'(x) = \frac{3(x^2-2x-35)-(3x-4)(2x-2)}{(x^2-2x-35)^2} = \frac{3x^2-6x-105-(6x^2-6x-8x+8)}{(x^2-2x-35)^2}$

$= \frac{3x^2-6x-105-6x^2+6x+8x-8}{(x^2-2x-35)^2} = \frac{-3x^2+8x-113}{(x^2-2x-35)^2}$

f) $f(x) = \frac{(3x^2+5x-4)}{x^2}$ $\qquad J = \mathbb{R}^*$

je reconnais $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec :

$u(x) = 3x^2+5x-4$, $u'(x) = 6x+5$, $v(x) = x^2$, $v'(x) = 2x$

ainsi : $f'(x) = \frac{(6x+5)x^2-(3x^2+5x-4)2x}{(x^2)^2} = \frac{6x^3+5x^2-(6x^3+10x^2-8x)}{x^4}$

$= \frac{6x^3+5x^2-6x^3-10x^2+8x}{x^4} = \frac{-5x^2+8x}{x^4}$

En cas de doute vous pouvez utiliser la partie calcul formel de géogébra (à activer via le menu affichage).
Pour les fonctions compliquées ça se fera en deux temps avec les fonctions dérivée et simplifier (on utilisera un coup de copier/coller dans cette dernière)
Par exemple pour les deux dernières fonctions de l'exercice 4 :

Calcul formel

1 Dérivée(((3x^2+5x-4))/x^2)

$$\rightarrow \frac{-2x\left(3x^2+5x-4\right)+x^2\left(6x+5\right)}{x^4}$$

2 Simplifier((-2x (3x² + 5x - 4) + x² (6x + 5)) / x⁴)

$$\rightarrow \frac{-5x+8}{x^3}$$

3 Dérivée((3x-4)/(x^2-2x-35))

$$\rightarrow \frac{-(2x-2)(3x-4)+3\left(x^2-2x-35\right)}{(x^2-2x-35)^2}$$

4 Simplifier((-(2x - 2) (3x - 4) + 3 (x² - 2x - 35)) / (x² - 2x - 35)²)

$$\rightarrow -\frac{\left(3x^2-8x+113\right)}{(x^2-2x-35)^2}$$