Probabilités

I. Loi de probabilité

1. Univers

Définition
Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat.
L'ensemble des résultats possibles, aussi appelés éventualités, est l'univers associé à l'expérience aléatoire.

Exemples :
- jeu de Pile ou Face : on a deux résultats possibles, Pile ou Face, l'univers est U={Pile,Face}
- lancer un dé : on a six résultats possibles, l'univers est Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6}
- lancer deux dés : l'univers est formé par l'ensemble des couples (x,y) où x et y sont des entiers pris entre 1 et 6, il contient 6x6=36 éléments, on peut le représenter par le tableau suivant :
  (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)
  (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)

2. Loi de probabilité

Définition
On définit une loi de probabilité sur un univers $\Omega=\{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$en associant à chacune des éventualités e_i de U un réel positif ou nul p_i, ces réels vérifiant la relation $\mathbf{p_1+p_2+p_3+......+p_n = 1}$
Cette loi peut être notée dans un tableau :

Eventualité	e_1	e_2	e_3	......	e_n
probabilité	p_1	p_2	p_3	......	p_n

Lois des grands nombres
Lorsqu'on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire, les fréquences d'apparition des éventualités e_i tendent vers les p_i .

3. Equiprobabilité

Définition
Lorsque tous les p_i d'une loi de probabilité sont égaux, on est en situation d'équiprobabilité, on dit que la loi est équirépartie.
Si l'univers de la loi contient *n* éléments, on a $p_i = \frac{1}{n}$quel que soit *i*.

Exemples
- Jeu de Pile ou Face
  Avec une pièce équilibrée, les deux faces ont la même probabilité de sortie, on a une loi équirépartie.

Eventualité	Pile	Face
probabilité	1/2	1/2

- Lancement d'un dé
  Avec un dé équilibré, toutes les faces ont la même probabilité de sortie, on a une loi équirépartie.

Eventualité	1	2	3	4	5	6
probabilité	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

II. Evènements

On considère une expérience aléatoire et son univers $\Omega =\{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$muni d'une loi de probabilité *P*.

1. Probabilité d'un évènement

Définition
Un événement est une partie de l'univers. On dit qu'un événement est réalisé lorsque le résultat obtenu à l'issue d'une expérience est une éventualité contenue dans l'évènement.
La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de ses éventualités.

Exemple
On tire un dé, on appelle A l'évènement consistant à obtenir au moins 5.
On a alors $A=\{5 , 6\}$. Comme les probabilités d'obtenir 5 et 6 sont égales à 1/6, on aura
$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2. Propriétés

- L'ensemble vide noté $\emptyset$ est appelé événement impossible, $P(\emptyset) = 0$.
- L'univers U est appelé événement certain, $P(U) = 1$.
- Pour tout événement A, on a $0 \leq P(A) \leq 10$.
- Dans le cas d'une loi équirépartie, si l'univers U contient n éventualités et si l'évènement A contient k éventualités, alors $P(A) = \frac{k}{n}$. On dit que $P(A) = \frac{nombredecasfavorables}{nombredecaspossibles}$

Exemple
Une urne contient 10 boules bleues et 5 boules rouges indiscernables au toucher.
Quelle est la probabilité de tirer une boule bleue ?
Les boules étant indiscernables au toucher, on est dans un cas d'équiprobabilité.
Comme il y a 15 boules au total, l'univers contient 15 éventualités.
L'évènement « tirer une boule bleue » contient 10 éventualités.
La probabilité de tirer une boule bleue est donc $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

3. Réunion et intersection d'évènements

La **réunion** des évènements A et B est l'évènement $A \cup B$ formé de toutes les éventualités appartenant à A **ou** à B. (il s'agit du **ou** inclusif, les éventualités peuvent appartenir aux deux évènements en même temps)
L'**intersection** des évènements A et B est l'évènement $A \cap B$ formé de toutes les éventualités appartenant à la fois à A **et** à B.
Lorsque $A \cap B = \emptyset$, A et B n'ont aucune éventualité commune, on dit que ce sont des évènements disjoints ou incompatibles.

Si A et B sont deux évènements quelconques, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Si A et B sont deux évènements disjoints, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

4. Evènements contraires

Définition
Le contraire de l'évènement A est l'évènement $\bar{A}$ formé par toutes les éventualités de l'univers qui ne sont pas dans A.
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

5. Répétitions d’expériences identiques et indépendantes

Définition
Il y a répétition d’expérience identiques lorsque la même expérience aléatoire est répétée plusieurs fois de suite

Exemple
On lance trois fois de suite une pièce de monnaie et on observe si l’on a fait pile ou face.

Définition
On dit d’expériences aléatoires successives qu’elles sont indépendantes lorsque l’issue d’une quelconque de ces expériences ne dépend pas de l’issue des autres expériences

Exemple : tirage avec remise.

II. Variables aléatoires

1. Définition

Une variable aléatoire sur l'univers $U=\{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ est une fonction X définie sur U.
On note $(X=x_i)$ l'ensemble des éventualités e_i vérifiant $X(e_i) = x_i$.
Si P est la loi de probabilité de U, la loi de probabilité de X est donnée par l'ensemble des probabilités des évènements $(X=x_i)$.

Exemple
On lance un dé. On perd 2 euros si on tire 1 ou 2, on gagne 0,5 euros si on tire 3 et enfin on gagne 1euro si on tire 4, 5 ou 6. On appelle X la variable aléatoire qui donne le gain associé à un tirage. Ainsi :
$X(1)= X(2) = -2$; $X(3) = 0,5$; $X(4) = X(5) = X(6) = 1$.
On a $(X=-2) = \{1,2\}$, $(X=0,5) = \{3\}$ et $(X=1) = \{4,5,6\}$, d'où :
$P(X=-2) = 2/6 = 1/3$, $P(X=0,5) = 1/6$ et $P(X=1) = 3/6 = 1/2$.

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

X	- 2	0,5	1
***P(X=x*i)**	1/3	1/6	1/2

2. Espérance, variance et écart type.

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité P est donnée par le tableau :

X	x_1	x_2	x_3	......	x_n
$\boldsymbol{P(X=x_i)}$	p_1	p_2	p_3	......	p_n

On appelle espérance mathématique de X le nombre réel
$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum p_ix_i$

On appelle variance de X le nombre réel
$V(X) = \left(x_1 - E(X)\right)^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + \cdots + (x_n - E(X))^2 p_n = \sum (x_i - E(X))^2 p_i$

On appelle écart type de X le nombre réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple
Reprenons le jeu décrit au 1) et la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau :

X	- 2	0,5	1
***P(X=x*i)**	1/3	1/6	1/2

On a alors $E(X) = -2 \times \frac{1}{3} + 0,5 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{-4}{6} + \frac{0,5}{6} + \frac{3}{6} = \frac{-0,5}{6} = \frac{-1}{12}$.
Comme l'espérance mathématique est négative, on peut penser que lors d'un grand nombre de parties le joueur sera perdant.

3. Propriété de l'Espérance et de la variance.

Ce qui était vrai en stat le reste pour les probabilités. Pour faire court :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$
$$V(aX) = a^2V(X)$$