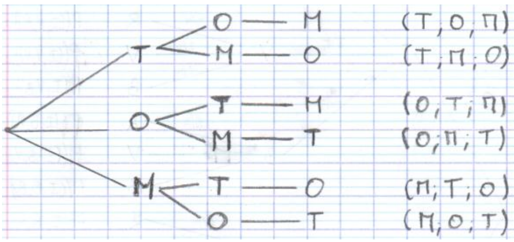
Découverte de la loi Binomiale



Pour le <u>LUNDI</u> 23 Avril

Partie I : Anagrammes

1) En vous inspirant de l'arbre ci-dessus permettant de trouver tous les anagrammes de TOM, écrire celui permettant de trouver les anagrammes de SAMY.
2) Sans faire d'arbre prévoir le nombre d'anagramme de NABIL, puis le nombre d'anagrammes d'un mot à N lettres sans répétition de lettre (PAULINE est ok, mais pas ESTELLE ni GAELLE)

Pour information $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ se note 5 ! et se lit factorielle de 5. $3 \times 2 \times 1$ se note 3 ! et se lit factorielle de 3. (sur la TI82, le point d'exclamation est accessible par $\boxed{\text{MATH}}$ puis PRB).

3) Si l'on voulait faire un arbre correspondant aux anagrammes de EMMA , en différenciant les deux M (vous auriez pu les dessiner de couleurs différentes) , combien de mots pourrions-nous écrire ?
4) Tracer l'arbre correspondants aux anagrammes de « EMMA » , cette fois ci on ne fera pas de distinctions entre les deux M. vérifiez que vous en avez moitié moins que si vous aviez fait la distinction entre les deux M.
5) On s'intéresse maintenant au mot REPETE, notre but final et de déterminer le nombre d'anagramme sans différencier les trois E.
   a) Commencer par donner le nombre d'anagramme quand on différencie les E
   b) Déterminer, pour une écriture non différenciée (REPETE), combien d'écriture différentiée est ce que l'on peut associer ($RE_1PE_2TE_3, RE_1PE_3TE_2$,…)
   c) Expliquer alors pourquoi on aura $\frac{6!}{3!}$ anagrammes pour REPETE quand on ne discerne pas les E.

Généralisation

6) Combien de manières différentes peut-on écrire le mot ESTELLE, si on différentie les E ? les L ? les E et les L ? (on attend de votre part un raisonnement et non des arbres, attention à la rédaction, elle doit être claire, précise et concise)
7) En déduire le nombre d'anagrammes du mot ESTELLE quand on ne différentie ni les E ni les L
8) Sans justifier verbalement donner le nombre d'anagramme du mot ANAGRAMME.
9) Donner le calcul justifiant qu'il y a 420 anagrammes pour TATIANA
10) Donner le nombre d'anagrammes pour les mots : ANANAS, CRANBERRIES, RHODODENDRON.

Partie II : La loi Binomiale

On s'intéresse à la répétions de N expériences aléatoires identiques et indépendantes dont les deux issues notées A et $\overline{A}$ de probabilités respectives p et (1-p). Les éventualités seront notées sous la forme de quintuplets de la forme $(\bar{A}, A, \bar{A}, \bar{A}, A)$.

1) Faire un arbres pour N=5 et p=0,3. (il va vous prendre une page complète)
2) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque éventualité le nombre de A obtenus. Compter le nombre de chemins sur l'arbre correspondant à X=0, X=1, X=2, X=3, X=4 et X=5
3) Vérifier que ces valeurs sont bien égales respectivement à $\frac{5!}{0!5!}, \frac{5!}{1!4!}, \frac{5!}{2!3!}, \frac{5!}{3!2!}, \frac{5!}{4!1!}$ et $\frac{5!}{5!0!}$ (avec 0 !=1), puis expliquer à la lumière de la partie A pourquoi on a ces égalités.

Pour information $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ Ce note $\binom{n}{k}$

4) Chaque chemin sur l'arbre est constitué de branches consécutives associées aux probabilités 0,3 ou 0,7, tant est si bien que la probabilité que le chemin observé soit emprunté est de la forme $0{,}3^k 0{,}7^h$ quel est le rapport entre k et h, en déduire une expression de la probabilité uniquement en fonction de k.
5) On s'intéresse à la probabilité d'avoir 2 A parmi les 5 , combien de chemins sont possibles ? quelle est est la probabilité de chacun d'eux ? en déduire P(X=2).

Quand on répète n fois de suite de manière indépendante une expérience aléatoire ayant deux issues notées A et $\bar{A}$ de probabilités respectives p et (1-p) , la loi de probabilité de la variable aléatoire X associant à chaque éventualité le nombre de fois ou le A est présent est appelée Loi Binomiale de paramètres n et p, on la note aussi $B(n; p)$. Pour tout entier k compris entre 0 et n on aura $P(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. L'arbre représentant l'expérience aléatoire est appelé schéma de Bernoulli.

Vous pouvez vérifier votre réponse à la question 5) à l'aune de cette définition.

Partie III : Espérance d'une loi binomiale (facultative)
L'objectif de cet exercice est de calculer l'espérance d'une loi $B(n; p)$. On note q le nombre (1 – p)
soit f la fonction définie sur R par $f(x) = (px + q)^n$

1) Développer f(x) à l'aide du binôme de Newton (google et wikipedia sont tes amis).
2) Vous disposez, à présent, de deux expressions de f(x) : l'une est la puissance $n^{ième}$d'une fonction affine l'autre est une fonction polynôme
   a. Ecrivez f sous la forme u^n, explicitez u(x).
   b. sachant que la dérivée de la fonction u^n est égale à $n \times u' \times u^{n-1}$, dérivez f.
   c. Dérivez l'expression polynomiale de f.
3) Donner l'expression de l'espérance mathématique E(X) de la loi binomiale X de paramètres n et p.
4) en calculant f'(x) pour une valeur particulière de x, prouver que : E(X) = n p.

Partie IV : Exercice d'application
On répète 6 fois consécutivement un lancer de dé équilibré. On gagne (noté G) si on a un 5 ou un 6, on perd sinon (noté $\bar{G}$).
Soit X la variable aléatoire associant à chaque éventualité le nombre de fois où l'on gagne.

1) Donner la loi de X
2) En déduire son espérance
3) On se propose de considérer la variable aléatoire Y, elle associe à chaque éventualité 2 euros par fois où on à G et 0€ pour tous les $\bar{G}$ et on retranche à la somme obtenue le prix « t » du ticket. Donner le prix du ticket pour que l'organisateur du jeux gagne en moyenne 1€ par partie.

Aide : une vidéo sympa et bien faite : http://coursgratuits.net/forum/comments.php?DiscussionID=1153
Attention c'est rapide !

La Ti-82 possède une fonction intégrée donnant la loi de probabilité de la Binomiale de paramétre N et P : Binompdf(N ;P) avec N le nombre d'itération et P la probabilité : elle donne la deuxième ligne de la loi de probabilité B(N ;P)

Sous excel
La fonction « Loi.Binom(k ;n ;p ;Faux) » donnera P(X=k) si X est une variable aléatoire suivant la loi de probabilité B(n ;p)

Une association organise des promenades en montagne. Douze guides emmènent chacun, pour la journée, un groupe de personnes dès le lever du Soleil. L'été il y a plus de demandes que de guides et chaque groupe doit s'inscrire la veille de la promenade.
Mais l'expérience des dernières années prouve que la probabilité que chacun des groupes inscrits ne se présente pas au départ de la promenade est égale à 1/8

. On admettra que les groupes inscrits se présentent indépendamment les uns des autres.
Les probabilités demandées seront arrondies au 100e le plus proche.

1. a. Montrer que la probabilité qu'un jour donné les 12 groupes inscrits soient tous présents est comprise entre 0,20 et 0,21.

b. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où les 12 groupes inscrits se sont tous présentés au départ lors d'un mois de 30 jours. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Donner la signification des évènements X = 30 puis X = 0 et calculer la probabilité de ces évènements.

Préciser l'espérance mathématique E(X)
Quelle signification peut-on donner à ce résultat ?

c. Une somme de 1Crédit (lamonnaie locale) est demandée à chaque groupe pour la journée. Cette somme est réglée au départ de la promenade.
Dans le cas où un groupe ne se présente pas au départ, l'association ne gagne évidemment pas le Crédit que ce groupe aurait versé pour la journée.
On nomme S la variable aléatoire égale à la somme, en Crédits, perçue par l'association un jour donné.

Calculer la probabilité de l'évènement [S = 11].
Préciser l'espérance mathématique de S.

2. a. Agacé par le nombre de guides inemployés, le dirigeant de l'association décide de prendre chaque jour une réservation supplémentaire. Évidemment si les 13 groupes inscrits se présentent, le 13e groupe sera dirigé vers une activité de substitution. Toutefois, cette activité de remplacement entraîne une dépense de 2 Crédits à l'association.

Quelle est a probabilité P13 qu'un jour donné il n'y ait pas de désistement, c'est-à-dire que les 13 groupes inscrits la veille se présentent au départ de la promenade ?

b. Soit R la variable aléatoire égale au coût de l'activité de substitution.
Préciser la loi de la variable aléatoire R et calculer son espérance mathématique.
c. Montrer que le gain moyen obtenu pour chaque jour est :

Calculer ce gain.
d. La décision du dirigeant est-elle rentable pour l'association?