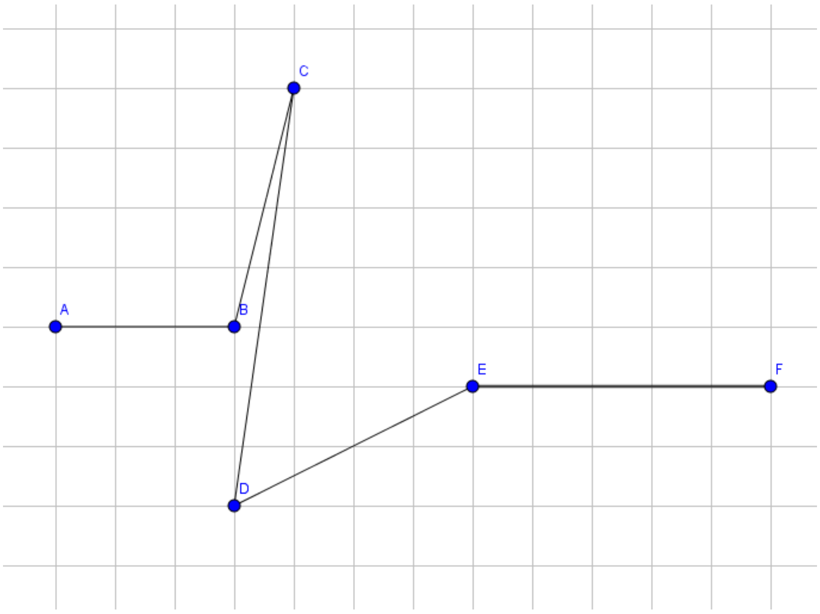
Fiche d'exercices Trigonométrie

Sommaire :

Programme de révision :
Déterminer le sinus d'un angle dont on connait le cosinus et le domaine d'appartenance (P3)
Jouer avec la relation de Chasles (P1 + 26P194)
Arcs associés :Savoir déterminer le cosinus et le sinus de n'importe quel angle de la famille d'un angle important + (utiliser exercice 3 P 5 pour déterminer $sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right)$ et $sin\left(\frac{9\pi}{10}\right) = \cdots$
Equations trigonométriques
Placer des angles sur le cercle trigonométrique
Trouver la mesure principale d'un angle

Exercice trigo 1



On sait que $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

$(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

$(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EF}) = \frac{-13\pi}{12}[2\pi]$**et**$(AB)//(EF)$

Déterminer $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})$

Comme $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont de même direction mais de sens différent on aura : $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{EF}) = \pi[2\pi]$

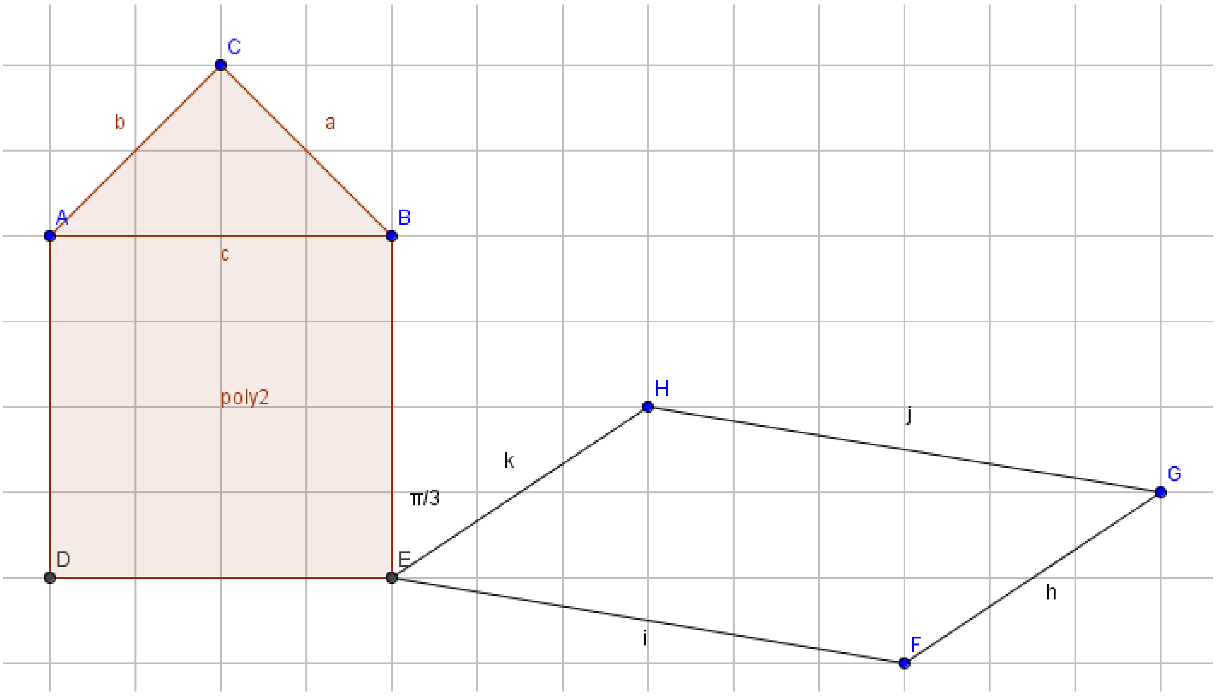
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}) + (\overrightarrow{DE};\overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EF}) = \pi[2\pi]$

$\Leftrightarrow \frac{-2\pi}{3} + \pi + (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}) + \pi + \frac{-\pi}{4} + \pi + \frac{-13\pi}{12} = \pi[2\pi]$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}) = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \frac{13\pi}{12} - 2\pi[2\pi]$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}) = 0[2\pi]$

Exercice 44P198



a)

$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{FG}) = (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{FG})[2\pi]$découle de la relation de chasles sur les angles, appliquée deux fois.

b)

$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ $\qquad$ $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

c)

$$(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{FG}) = (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{BE};\overrightarrow{EH}) + (\overrightarrow{EH};\overrightarrow{FG})[2\pi]$$

Or ADEB est un carré donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE}$ et donc $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{BE}) = 0[2\pi]$

EFGH est un parallélogramme $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$ et donc $(\overrightarrow{EH};\overrightarrow{FG}) = 0[2\pi]$

Ainsi $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{FG}) = (\overrightarrow{BE};\overrightarrow{EH})[2\pi]$

$$= \pi + (\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EH})[2\pi]$$
$$= \pi + (-\frac{\pi}{3})[2\pi]$$

d) ainsi $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{FG}) = (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{FG})[2\pi]$

$$= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \pi + (-\frac{\pi}{3})[2\pi]$$
$$= -\frac{\pi}{12}[2\pi]$$

Exercice Bonus

Soit $x \in [\frac{\pi}{2};\pi]$ tel que $\sin(x) = 0,6$, déterminer la valeur exacte de $\cos(x)$ et celle de $\tan(x)$

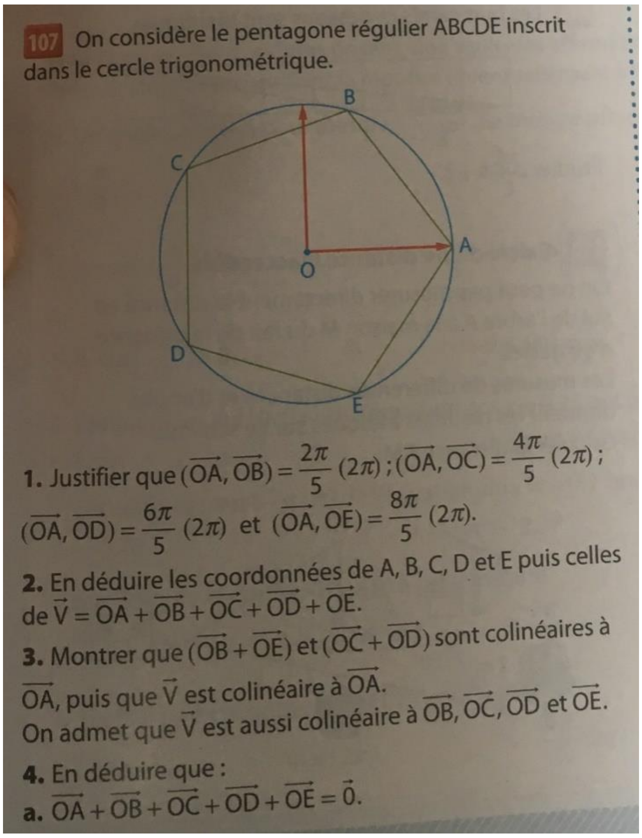
On sait que $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ donc $0,6^2 + \cos^2(x) = 1$ donc $\cos^2(x) = 1 - 0,36$

Ainsi $\cos^2(x) = 0,64$ donc $\cos x = \sqrt{0,64}$ ou $\cos x = -\sqrt{0,64}$

Or $x \in [\frac{\pi}{2};\pi]$ donc $\cos x \leq 0$ donc $\cos x = -\sqrt{0,64} = -0,8$

De plus $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{0,6}{-0,8} = -0,75$

Exercice 1 (fiche)


107 On considère le pentagone régulier ABCDE inscrit dans le cercle trigonométrique.

1. Justifier que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{5}(2\pi)$; $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}) = \frac{4\pi}{5}(2\pi)$; $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}) = \frac{6\pi}{5}(2\pi)$ et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}) = \frac{8\pi}{5}(2\pi)$.
2. En déduire les coordonnées de A, B, C, D et E puis celles de $\vec{V} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$.
3. Montrer que $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE})$ et $(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ sont colinéaires à $\overrightarrow{OA}$, puis que $\vec{V}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OA}$.
On admet que $\vec{V}$ est aussi colinéaire à $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OE}$.
4. En déduire que :
a. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.

1) Les angles au centre associés aux côtés d'un polygone régulier sont égaux, pour les obtenir on divise un tour complet : 2π par le nombre de côté

Ainsi $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD})$

$$= (\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OE}) = \cdots = \frac{2\pi}{5}[2\pi]$$

$$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})[2\pi]$$
$$= \frac{4\pi}{5}[2\pi]$$

$$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD})[2\pi]$$
$$= \frac{6\pi}{5}[2\pi]$$

$$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE})$$
$$= (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OE})[2\pi]$$
$$= \frac{8\pi}{5}[2\pi]$$

2) $A(\cos(0);\sin(0)) = A(1;0)$ donc $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$B\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right);\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$ et donc $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\\ \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\end{pmatrix}$

$C\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right);\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)$ et donc $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\\ \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\end{pmatrix}$

$D\left(\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right);\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right)=D\left(\cos\left(2\pi-\frac{4\pi}{5}\right);\sin\left(2\pi-\frac{4\pi}{5}\right)\right)=D\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right);\sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right)=$

$D\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right);-\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)$ et donc $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\\ -\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\end{pmatrix}$

$E\left(\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right);\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right)=E\left(\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right);\sin\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)\right)=E\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right);\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right)=$

$E\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right);-\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$ et donc $\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\\ -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\end{pmatrix}$

Ainsi $\vec{V}=\overrightarrow{OA}\binom{1}{0}+\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\\ \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\end{pmatrix}+\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\\ \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\end{pmatrix}+\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\\ -\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\end{pmatrix}+\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\\ -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\end{pmatrix}$

3)

$$\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\\ \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\end{pmatrix}+\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\\ -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\end{pmatrix}=\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}\right)\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\\ \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\end{pmatrix}=\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}\right)\begin{pmatrix}2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\left(\overrightarrow{OA}\binom{1}{0}\right)$$

$$\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\\ \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\end{pmatrix}+\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\\ -\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\end{pmatrix}=\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\\ \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)-\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\end{pmatrix}=\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)\begin{pmatrix}2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\left(\overrightarrow{OA}\binom{1}{0}\right)$$

Ainsi $\vec{V}=\overrightarrow{OA}\binom{1}{0}+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\left(\overrightarrow{OA}\binom{1}{0}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\left(\overrightarrow{OA}\binom{1}{0}\right)=\left(1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)\overrightarrow{OA}\binom{1}{0}$

Donc $\vec{V}$et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires.

On aurait pu travailler dans un autre repère, par exemple $(O;\overrightarrow{OB};\vec{j})$ avec $\vec{j}$ un vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{OB}$ et tel que $(\overrightarrow{OB};\vec{j})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et en utilisant un raisonnement analogue on aurait tout aussi bien pu prouver que $\vec{V}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires.

4)

$\overrightarrow{OB}$et$\overrightarrow{OA}$ ne sont pas colinéaires donc $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ est un repère du plan.

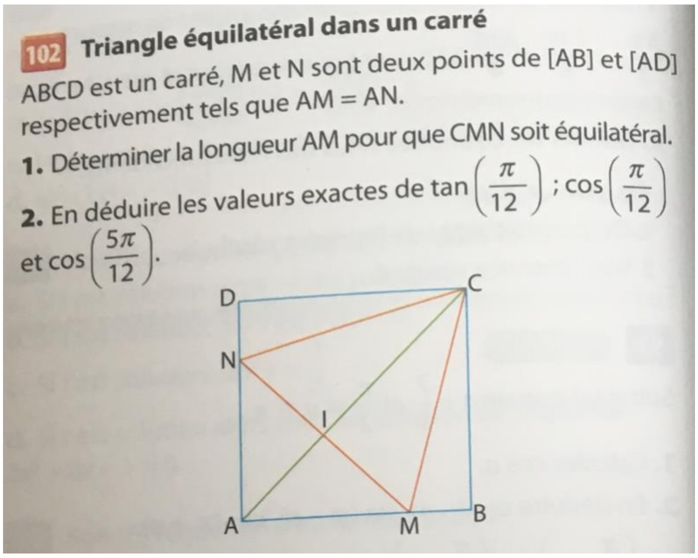
$\vec{V}$et$\overrightarrow{OA}$ colinéaires donc il existe un réel x tel que $\vec{V}=x\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OA}+0\overrightarrow{OB}$ c'est-à-dire $\vec{V}\binom{x}{0}$ de plus $\vec{V}$et$\overrightarrow{OB}$ colinéaires donc il existe un réel y tel que $\vec{V}=y\overrightarrow{OB}=0\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ c'est-à-dire $\vec{V}\binom{0}{y}$

Or dans un repère un vecteur ne peut avoir qu'un couple de coordonnées ainsi $\vec{V}\binom{x}{0}=\vec{V}\binom{0}{y}$ et on aura $x=y=0$

donc $\vec{V}=\vec{0}$

Et ainsi : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$

Exercice 2 (fiche)


102 Triangle équilatéral dans un carré

ABCD est un carré, M et N sont deux points de [AB] et [AD] respectivement tels que AM = AN.

1. Déterminer la longueur AM pour que CMN soit équilatéral.

2. En déduire les valeurs exactes de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$; $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

On se place dans un carré de côté $BC=c$.

Si on pose $AM=x$alors $AN=x$, $MB=c-x$,

$CM^2=c^2+(c-x)^2=2c^2-2xc+x^2$ (Pythagore dans MBC) ,

$MN^2=x^2+x^2$ (Pythagore dans AMN)

MNC équilatéral $\Leftrightarrow MN=CM \Leftrightarrow MN^2=CM^2$

$\Leftrightarrow 2x^2=2c^2-2xc+x^2 \Leftrightarrow x^2+2xc-2c^2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(2c)^2-4\times1\times(-2c^2)=12c^2$

$\Delta>0$et donc on aura deux racines : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2c-\sqrt{12c^2}}{2}=\frac{-2c-2c\sqrt{3}}{2}=c(-1-\sqrt{3})<0$ donc inacceptable

Et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=c\left(-1+\sqrt{3}\right)$

$$\widehat{MCB}=\widehat{ACB}-\widehat{ACM}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\tan\left(\widehat{MCB}\right)=\frac{MB}{BC}=\frac{c\left(-1+\sqrt{3}\right)}{c}=\left(-1+\sqrt{3}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\widehat{MCB}\right)=\frac{BC}{MC}=\frac{BC}{MN}=\frac{c}{x\sqrt{2}}=\frac{c}{c\left(-1+\sqrt{3}\right)\sqrt{2}}=\frac{c\left(-1-\sqrt{3}\right)\sqrt{2}}{c\left(-1+\sqrt{3}\right)\sqrt{2}\left(-1-\sqrt{3}\right)\sqrt{2}}$$

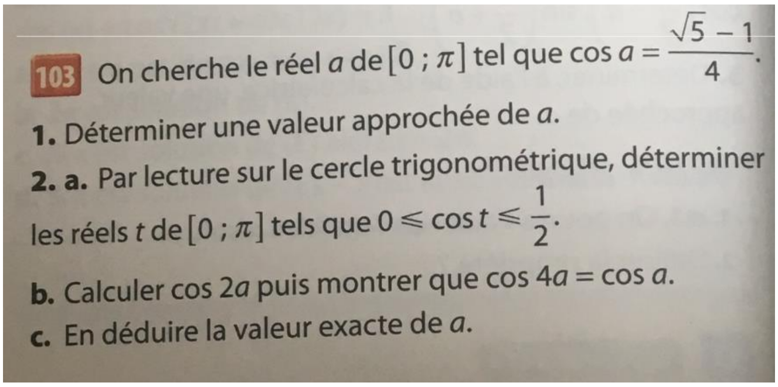
$$=\frac{\left(-1-\sqrt{3}\right)\sqrt{2}}{2\left((-1)^2-\sqrt{3}^2\right)}=\frac{\left(-1-\sqrt{3}\right)\sqrt{2}}{2(-2)}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{-4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\cos\left(\widehat{BMC}\right)=\frac{MB}{MC}$bonus$=\sin\left(\widehat{MCB}\right)$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{MB}{MC}=\frac{MB}{MN}=\frac{c-x}{x\sqrt{2}}=\frac{c-c\left(-1+\sqrt{3}\right)}{c\left(-1+\sqrt{3}\right)\sqrt{2}}=\frac{c\left(2-\sqrt{3}\right)\sqrt{2}}{c\left(-1+\sqrt{3}\right)2}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(1+\sqrt{3}\right)2}$$

$$=\frac{\left(2\sqrt{3}+2-3-\sqrt{3}\right)\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}^2-1^2\right)2}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2}}{2\times 2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Exercice 3



103 On cherche le réel a de $[0\,;\pi]$ tel que $\cos a=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

1. Déterminer une valeur approchée de a.

2. a. Par lecture sur le cercle trigonométrique, déterminer les réels t de $[0\,;\pi]$ tels que $0\leqslant\cos t\leqslant\frac{1}{2}$.

b. Calculer $\cos 2a$ puis montrer que $\cos 4a=\cos a$.

c. En déduire la valeur exacte de a.

On sait que $a\in[0;\pi]$ avec $\cos a=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

1) Si on utilise la fonction $\cos^{-1}$

on obtient$a=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\approx 1{,}257$

2) a)$\cos t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos t=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\\ \quad ou\\ t=-\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\end{cases}$

or ici on est sur $[0;\pi]$

Donc $\cos t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{3}$(ici on a gardé un seul angle de la première famille et aucun de la deuxième (pour savoir quoi faire il faut générer les valeurs possibles et voir si on peut les garder.

($\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ donne : … ; $\frac{-5\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; … en fait les valeurs : $\frac{-5\pi}{3}$ est avant 0 et les valeurs précédentes sont encore plus petites donc encore plus en dessous de la borne inférieure de l'intervalle. $\frac{7\pi}{3}>\pi$ donc on est en dehors de l'intervalle et les valeurs suivantes sont encore plus grandes donc aussi hors de l'intervalle.)

La fonction $\cos t$ étant décroissante sur $[0;\pi]$ on aura $\frac{\pi}{3}\leq t\leq\pi$ =>$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\geq\cos(t)\geq\cos(\pi)$ =>$\frac{1}{2}\geq\cos(t)\geq 0$

Et ailleurs ? $\frac{\pi}{3}>t\geq 0$ =>$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)<\cos(t)\leq 1$ =>$\frac{1}{2}<\cos(t)\leq 1$ donc les t considérés ne sont pas solution.

$$S=\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$$

$$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2-1=2\,\frac{5-2\sqrt{5}+1}{16}-\frac{8}{8}=\frac{-2-2\sqrt{5}}{8}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos(4a)=\cos(2\times 2a)=2\cos^2 2a-1=2\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)^2-1=2\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{16}\right)-\frac{8}{8}=\frac{6+2\sqrt{5}}{8}-\frac{8}{8}$$

$$=\frac{-2+2\sqrt{5}}{8}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}=\cos(a)$$

$$\cos(4a)=\cos(a)\Leftrightarrow\begin{cases}4a=a\ [2\pi]\\ \quad ou\\ 4a=-a\ [2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a=0\ [2\pi]\\ \quad ou\\ 5a=0\ [2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\left[\frac{2\pi}{3}\right]\\ \quad ou\\ a=0\left[\frac{2\pi}{5}\right]\end{cases}$$

$a=0\left[\frac{2\pi}{3}\right]$correspond à …; $-\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{2\pi}{3}$; 0; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{6\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; …

Dans l'intervalle considéré 0 et $\frac{2\pi}{3}$ sont acceptables mais pas les autres

$a = 0 \left[\frac{2\pi}{5}\right]$correspond à $\ldots ; -\frac{4\pi}{5} ; -\frac{2\pi}{5} ; 0 ; \frac{2\pi}{5} ; \frac{4\pi}{5} ; \frac{6\pi}{5} ; \frac{8\pi}{5} ; \ldots$

Dans l'intervalle considéré 0 ; $\frac{2\pi}{5}$ et $\frac{4\pi}{5}$ sont acceptables mais pas les autres

Donc on sait que a est une des 5 valeurs 0 ; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{5}$ et $\frac{4\pi}{5}$

De plus $\cos(0) = 1$, $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) < 0$ donc la mesure recherchée est $\frac{2\pi}{5}$

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

Equations trigonométriques

Exemple du cours (à terminer à la maison)

$\cos(5x+\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(5x+\pi) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)car\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ 5x+\pi = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{3\pi}{4} - \frac{4\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ 5x = -\frac{3\pi}{4} - \frac{4\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ 5x = -\frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5} \\ ou \\ x = -\frac{7\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5} \end{cases}$$

Version avec modulo :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+\pi = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi] \\ ou \\ 5x+\pi = -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{3\pi}{4} - \frac{4\pi}{4}\ [2\pi] \\ ou \\ 5x = -\frac{3\pi}{4} - \frac{4\pi}{4}\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \\ ou \\ 5x = -\frac{7\pi}{4}\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20}\left[\frac{2\pi}{5}\right] \\ ou \\ x = -\frac{7\pi}{20}\left[\frac{2\pi}{5}\right] \end{cases}$$

Exemple fait avec le groupe 1 le 7 décembre

$\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$conseil : faire un dessin pour trouver l'angle

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ ou \\ 3x+\frac{\pi}{2} = \pi - (-\frac{\pi}{3})\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ ou \\ 3x = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\frac{5\pi}{6}\ [2\pi] \\ ou \\ 3x = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5\pi}{18}\ [\frac{2\pi}{3}] \\ ou \\ x = \frac{5\pi}{18}\ [\frac{2\pi}{3}] \end{cases}$$

Résoudre l'équation $\cos\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right) = -1$ dans R

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right) = \cos(\pi) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+\frac{2\pi}{3} = \pi\ [2\pi] \\ ou \\ 4x+\frac{2\pi}{3} = -\pi\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{3\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \\ ou \\ 4x = -\frac{3\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ ou \\ 4x = -\frac{5\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12}\ [\frac{2\pi}{4}] \\ ou \\ x = -\frac{5\pi}{12}\ [\frac{2\pi}{4}] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12}\ [\frac{\pi}{2}] \\ ou \\ x = -\frac{5\pi}{12}\ [\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

La résoudre dans $[0; 2\pi]$

On reprends les solutions sur R : $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12}\ [\frac{\pi}{2}] \\ ou \\ x = -\frac{5\pi}{12}\ [\frac{\pi}{2}] \end{cases}$ et on ne gardera que les valeurs dans $[0; 2\pi]$.

$\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{12}; \frac{13\pi}{12}; \frac{19\pi}{12}$pour la première ligne et on se rend compte que les solutions de l'autres lignes sont les mêmes.

Soit l'équation : $\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

1) Résolution de l'équation dans $\mathbb{R}$ 2) visualisation sur un cercle 3) résolution dans $[-\pi;\pi]$

1)

actions	description
$\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\Leftrightarrow \cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	On remplace le membre de gauche par le cosinus d'un angle pour avoir la forme $\cos x=\cos a$.*
$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}\,[2\pi] \\ ou \\ 4x-\frac{\pi}{3}=-\frac{3\pi}{4}\,[2\pi] \end{cases}$	On adapte la propriété du cours : $\cos x=\cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x=a\,[2\pi] \\ ou \\ x=-a\,[2\pi] \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x=\frac{3\pi\times 3}{4\times 3}+\frac{\pi\times 4}{3\times 4}\,[2\pi] \\ ou \\ 4x=-\frac{3\pi\times 3}{4\times 3}+\frac{\pi\times 4}{3\times 4}\,[2\pi] \end{cases}$	On isole le x
$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x=\frac{13\pi}{12}\,[2\pi] \\ ou \\ 4x=-\frac{5\pi}{12}\,[2\pi] \end{cases}$	
$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{13\pi}{12}\times\frac{1}{4}\left[2\pi\times\frac{1}{4}\right] \\ ou \\ x=-\frac{5\pi}{12}\times\frac{1}{4}\left[2\pi\times\frac{1}{4}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{13\pi}{48}\left[\frac{\pi}{2}\right] \\ ou \\ x=-\frac{5\pi}{48}\left[\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$	Quand on divise par le coefficient de , il faut bien penser à TOUT diviser par lui (y compris le modulo)

* comment trouver le bon angle ?

D'abord faire abstraction du signe. Retrouver l'angle associé dans le tableau des cosinus et des sinus des angles importants. Astuce radicale : si l'angle est négatif, pas de changement l'utilisation du tableau suffit, par contre s'il est négatif, alors il suffit de rajouter π à l'angle du tableau pour avoir l'angle attendu : dans l'exemple j'aurai pu remplacer $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ par $\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

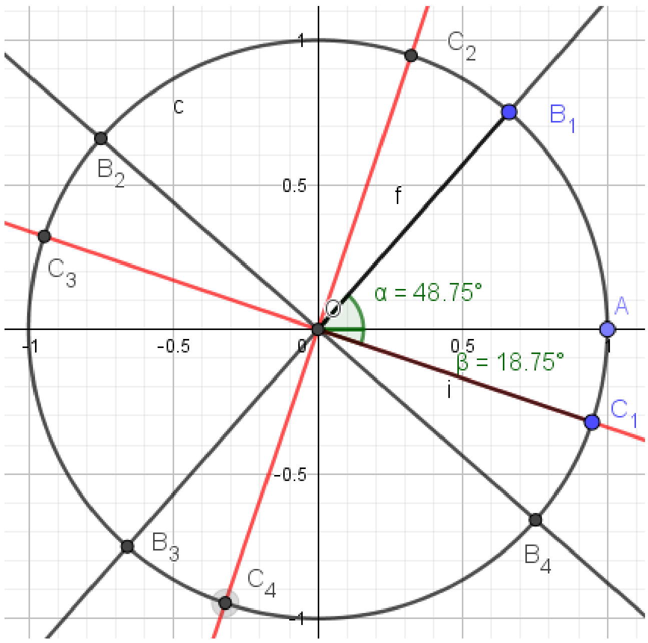
2) quand on a du modulo $\left[\frac{2\pi}{n}\right]$, ça veut dire que l'on va avoir n points sur le cercle pour cette égalité, donc on sait déjà qu'on aura dans cet exercice $2\times 4=8$ points. Pour placer les angles un peu compliqués on fait une conversion en degré puis on les place avec le rapporteur.

$\frac{13\pi}{48}rad=48{,}75°et-\frac{5\pi}{48}rad=-18{,}75°$

De plus $\frac{\pi}{2}rad=90°$ donc pour passer d'un angle à l'autre associé à une même équation on ajoute 90°

Les points B sur les droites noires correspondent à la première ligne de solution (celle qui tourne autour de $\frac{13\pi}{48}$)

Les point C sur les droites rouges correspondent à la seconde ligne de solution (celle qui tourne autour de $-\frac{5\pi}{48}$)



3) Résolution de $\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[-\pi;\pi]$

$x=\frac{13\pi}{48}\left[\frac{\pi}{2}\right]\Leftrightarrow x=\frac{13\pi}{48}\left[\frac{24\pi}{48}\right]\Leftrightarrow x$est dans : … ; $-\frac{59\pi}{48}$; $-\frac{35\pi}{48}$; $-\frac{11\pi}{48}$; $\frac{13\pi}{48}$; $\frac{37\pi}{48}$; $\frac{61\pi}{48}$; ….

De cette infinité de valeurs on ne va conserver que les 4 qui sont dans l'intervalle

$x=-\frac{5\pi}{48}\left[\frac{\pi}{2}\right]\Leftrightarrow x=-\frac{5\pi}{48}\left[\frac{24\pi}{48}\right]\Leftrightarrow x$est dans : … ; $-\frac{53\pi}{48}$; $-\frac{29\pi}{48}$; $-\frac{5\pi}{48}$; $\frac{19\pi}{48}$; $\frac{43\pi}{48}$; $\frac{67\pi}{48}$; …. Idem

Du coup $S=\left\{-\frac{35\pi}{48};-\frac{29\pi}{48};-\frac{11\pi}{48};-\frac{5\pi}{48};\frac{13\pi}{48};\frac{19\pi}{48};\frac{37\pi}{48};\frac{43\pi}{48}\right\}$

A la manière des exemples fait avec le groupe 2 le 14 décembre

Exercice 1

soit x un réel dans $\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ tel que $\sin x = -0{,}7$ déterminer $\cos x$ *et* $\tan x$

On sait que $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ donc $(-0{,}7)^2 + \cos^2(x) = 1$ donc $\cos^2(x) = 1 - 0{,}49$

Ainsi $\cos^2(x) = 0{,}51$ donc $\cos x = \sqrt{0{,}51}$ ou $\cos x = -\sqrt{0{,}51}$

Or $x \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ donc $\cos x \leq 0$ donc $\cos x = -\sqrt{0{,}51}$

De plus $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{-0{,}7}{-\sqrt{0{,}51}} = \frac{0{,}7\sqrt{0{,}51}}{0{,}51}$

Exercice 2

Soit une ligne brisée ABCDE avec $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) = \frac{3\pi}{7}[2\pi]$, $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right) = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}\right) = \frac{4\pi}{9}[2\pi]$

Déterminer $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE}\right)$

Réponse : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE}\right) = \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{DC}\right) + \left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}\right)[2\pi]$

$= \pi + \left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right) + \left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}\right)\ [2\pi]$

$= \pi + \frac{3\pi}{7} - \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{9}\ [2\pi] = \frac{63\pi}{63} + \frac{27\pi}{63} - \frac{21\pi}{63} + \frac{28\pi}{63}\ [2\pi] = \frac{97\pi}{63}\ [2\pi]$

Remarques : autres valeurs possibles : $\frac{97\pi}{63} + 2\pi = \frac{223\pi}{63}$ ou encore $\frac{97\pi}{63} + 2\pi = \frac{-29\pi}{63}$

Exercice 3

Résolution dans $\mathbb{R}$ et dans $[0; 2\pi[$ de $\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$

Réponses : dans $\mathbb{R}$

$\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{6} = x - \frac{\pi}{5}\ [2\pi] \\ ou \\ 3x + \frac{\pi}{6} = -\left(x - \frac{\pi}{5}\right)\ [2\pi] \end{cases}$ (Attention la décomposition aurait été très différente pour une équation en sinus.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{5}\ [2\pi] \\ ou \\ 4x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{5}\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{11\pi}{30}\ [2\pi] \\ ou \\ 4x = \frac{\pi}{30}\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{11\pi}{60}\left[\frac{2\pi}{2}\right] \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{120}\left[\frac{2\pi}{4}\right] \end{cases}$

Résolution dans $[0; 2\pi[$

$x = -\frac{11\pi}{60}\left[\frac{2\pi}{2}\right]$, vu que $\frac{2\pi}{2} = \frac{60\pi}{60}$ cette formule correspond à $-\frac{11\pi}{60}$; $-\frac{11\pi}{60} + \frac{60\pi}{60} = \frac{49\pi}{60}$; $\frac{49\pi}{60} + \frac{60\pi}{60} = \frac{109\pi}{60}$; $\frac{169\pi}{60}$

$x = \frac{\pi}{120}\left[\frac{2\pi}{4}\right]$, vu que $\frac{2\pi}{4} = \frac{60\pi}{120}$ cette formule correspond à :

$\frac{\pi}{120} - \frac{60\pi}{120} = \frac{-59\pi}{120}$; $\frac{\pi}{120}$; $\frac{\pi}{120} + \frac{60\pi}{120} = \frac{61\pi}{120}$; $\frac{61\pi}{120} + \frac{60\pi}{120} = \frac{121\pi}{120}$; $\frac{121\pi}{120} + \frac{60\pi}{120} = \frac{181\pi}{120}$; $\frac{181\pi}{120} + \frac{60\pi}{120} = \frac{241\pi}{120}$

Ainsi les solutions dans $[0; 2\pi[$ seront $S = \left\{\frac{49\pi}{60} ; \frac{109\pi}{60} ; \frac{\pi}{120} ; \frac{61\pi}{120} ; \frac{121\pi}{120} ; \frac{181\pi}{120}\right\}$

Exercice 4 Conversion et mesure principale

Convertir les angles suivants : 35° et $\frac{5\pi}{2}\ rad$

Donner la mesure principale d'un angle dont une des mesures est $\frac{135\pi}{3}$

Réponses : 35°$= \frac{35}{360} \times 2\pi = \frac{7\pi}{36} rad$ et $\frac{5\pi}{2}\ rad = \frac{5\pi}{2}\frac{360}{2\pi} = 450°$

$\frac{135\pi}{3} - 22 \times 2\pi = +\pi$ or $\pi \in]-\pi; \pi]$ donc π sera la mesure principale de mon angle.

Exercice 5

Donner les valeurs des cosinus et sinus suivants :

$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

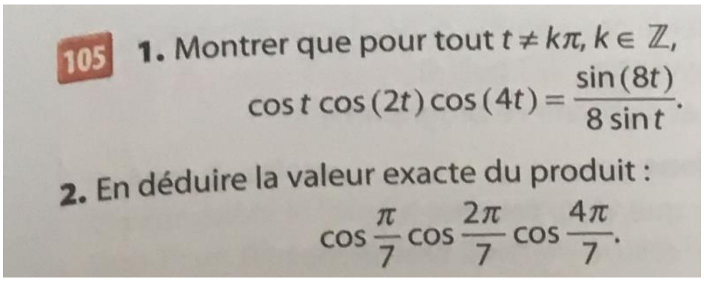
Réponses : $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

BONUS inédit : Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ calculer $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

$\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Pour plus tard (quand on aura fait le chapitre sur le produit scalaire).



105 **1.** Montrer que pour tout $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\cos t \cos(2t) \cos(4t) = \frac{\sin(8t)}{8 \sin t}.$$

2. En déduire la valeur exacte du produit :

$$\cos\frac{\pi}{7} \cos\frac{2\pi}{7} \cos\frac{4\pi}{7}.$$

Exercice 5

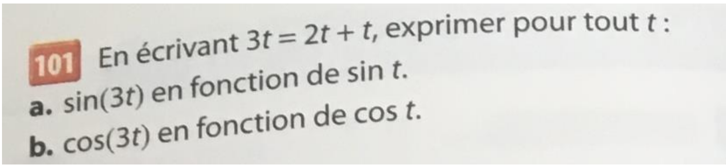
$$\frac{\sin(8t)}{8\sin t} = \frac{\sin(2\times 4t)}{8\sin t} = \frac{2(\cos(4t)\sin(4t))}{8\sin t}$$

$$= \frac{2(\cos(4t)\sin(2\times 2t))}{8\sin t}$$

$$= \frac{2(\cos(4t)\,2\cos(2t)\sin(2t))}{8\sin t}$$

$$= \frac{2(\cos(4t)\,2\cos(2t)\,2\cos(t)\sin(t))}{8\sin t}$$

$$= \frac{(\cos(4t)\cos(2t)\cos(t)\sin(t))}{\sin t} = \cos(4t)\cos(2t)\cos(t)$$



101 En écrivant $3t = 2t + t$, exprimer pour tout t :

a. $\sin(3t)$ en fonction de $\sin t$.

b. $\cos(3t)$ en fonction de $\cos t$.

Exercice 7

$$\sin(3t) = \sin(2t+t) = \sin(2t)\cos(t) + \cos(2t)\sin(t)$$

$$= (2\sin(t)\cos(t))\cos(t) + (\cos^2(t) - \sin^2(t))\sin(t)$$

$$= (2\sin(t)\cos^2(t)) + \cos^2(t)\sin(t) - \sin^3(t)$$

$$= 3\sin(t)\cos^2(t) - \sin^3(t)$$

$$\cos(3t) = \cos(2t+t) = \cos(2t)\cos(t) - \sin(2t)\sin(t)$$

$$= (\cos^2(t) - \sin^2(t))\cos(t) - (2\sin(t)\cos(t))\sin(t)$$

$$= \cos^3(t) - \sin^2(t)\cos(t) - 2\sin^2(t)\cos(t) = \cos^3(t) - 3\sin^2(t)\cos(t)$$