# Second degré et problèmes

## I. Fonctions polynômes

**Définition :**
On appelle fonction monôme une fonction qui à tout réel $x$ associe $ax^n$ avec $a$ réel non nul et $n$ entier naturel. L'entier naturel $n$ est appelé degré du monôme.

**Remarques**

Les fonctions constantes sont des monômes de degré 0.
Les fonctions linéaires ($x \to ax$ avec $a \neq 0$) sont des monômes de degré 1.
La fonction carré est un monôme de degré 2.
On appelle fonction polynôme une somme de monômes.
Le degré d'un polynôme est le degré de son monôme de plus haut degré.

**Exemples**
La fonction $f$ définie par $f(x) = x^3 - 5x + 1$ est un polynôme de degré 3.
Les fonctions affines de coefficient directeur non nul sont des polynômes de degré 1.

## II. Equations du second degré

**Définition**
On appelle trinôme du second degré une fonction qui à tout réel $x$ associe « $ax^2 + bx + c$ » avec $a \neq 0$, c'est à dire une fonction polynôme de degré 2.

**Définition**

Tout trinôme du second degrés $ax^2 + bx + c$ peut être écrit sous la forme $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$.
Cette écriture est appelée forme canonique du trinôme.

Démonstration

$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + x\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right]$ Je factorise par a (pour éviter de les racines dans la suite)

$$= a\left[x^2 + \underbrace{2x\frac{b}{2a}}_{double\ produit} + \underbrace{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}}_{le\ carré\ et\ sa\ compensation} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$ je factorise mon identité remarquable

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right]$$ je mets au même dénominateur

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$ J'ajoute mes deux fractions

**Définition 3 :**
On appelle <u>discriminant</u> de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$), et on note $\Delta$, le nombre défini par :
$\Delta = b^2 - 4ac$

Remarque :

La forme canonique sera donc : $a\left[\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

Propriété
On considère l'équation $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$.

• Si $\Delta>0$, l'équation a deux solutions distinctes, $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Ces solutions sont appelées les racines du trinôme.
On a la factorisation suivante : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

• Si $\Delta=0$, l'équation a une seule solution $x_0=\frac{-b}{2a}$ Cette solution est appelée racine double du trinôme.

On a la factorisation suivante : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$.

• Si $\Delta<0$, l'équation n'a pas de solution réelle.

Le trinôme $ax^2+bx+c$ ne peut pas être factorisé sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.

**Exemples**

1) Résoudre $x^2-5x+6=0$.

On a $\Delta=(-5)^2-4\times1\times6=25-24=1$.

Il ya donc deux solutions qui sont : $x_1=\frac{5-\sqrt{1}}{2}=2$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{1}}{2}=3$

On a la factorisation $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

2) Résoudre $4x^2-4x+1=0$.

On a $\Delta=(-4)^2-4\times4\times1=16-16=0$.

Il a donc une seule solution $x_0=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

On a la factorisation $4x^2-4x+1=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

3) Résoudre $x^2+x+1=0$.

On a $\Delta=1^2-4\times1\times1=1-4=-3$.

Il n'y a donc pas de solution réelle.

Le trinôme $x^2+x+1$ ne peut pas être factorisé.

## III. Signe du trinôme

On considère la fonction trinôme définie par $f(x)=ax^2+bx+c$ et son discriminant $\Delta$.

• Si $\Delta>0$, l'équation $f(x)=0$ a deux solutions $x_1$ et $x_2$ et $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.

On a alors le tableau de signe suivant :

| $x$ | | $x_1$ | | $x_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-x_1$ | - | 0 | + | | + |
| $x-x_2$ | - | | - | 0 | + |
| $a(x-x_1)(x-x_2)$ | signe de $a$ | 0 | signe de $-a$ | 0 | signe de $a$ |

« $ax^2+bx+c$ » est du signe de $a$ à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ entre les racines.

• Si $\Delta=0$, l'équation $f(x)=0$ a une seule solution $x_1$. On a alors la factorisation
$f(x)=a(x-x_1)^2$.

« $ax^2+bx+c$ » est du signe de « $a$ ».

• Si $\Delta<0$, l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solutions, le trinôme ne peut pas être factorisé en un produit de facteurs du premier degré.

« $ax^2+bx+c$ » est du signe de « $a$ ».

En résumé :
« $ax^2+bx+c$ » est toujours du signe de « $a$ » sauf entre les racines lorsqu'elles existent.

**Exemples**

1) Etudier le signe de $x^2 - 5x + 6$.
L'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ a deux solutions $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$. On en déduit le tableau de signes suivant :

| x | | 2 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-5x+6$ | + | 0 | - | 0 | + |

2) Etudier le signe de $4x^2 - 4x + 1$.
L'équation $4x^2 - 4x + 1 = 0$ a une solution unique $x_0 = \frac{1}{2}$. On en déduit que $4x^2 - 4x + 1$ est toujours positif (ou nul en 0,5)
3) Etudier le signe de $x^2 + x + 1$
L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solutions, $x^2 + x + 1$ est donc toujours positif.

## IV. Etude des fonctions trinômes

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

### 1. Variations

Le tableau de variations dépend du signe de $a$.

**Si a > 0**

| x | | -b/2a | |
|---|---|---|---|
| $ax^2+bx+c$ | ↘ | | ↗ |

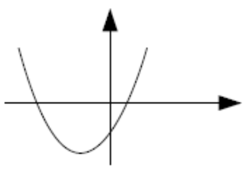
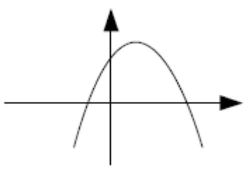
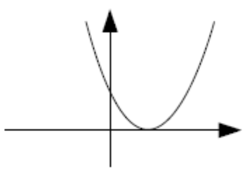
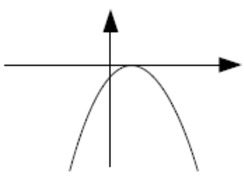
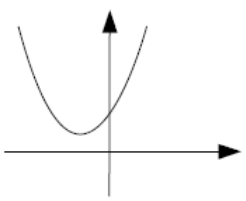
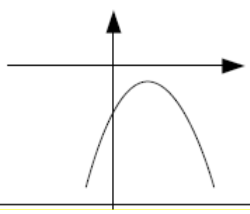
**Si a < 0**

| x | | -b/2a | |
|---|---|---|---|
| $ax^2+bx+c$ | ↗ | | ↘ |

On a un extrêmum pour $x = -\frac{b}{2a}$

### 2. Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction trinôme est une parabole.
Le signe de $a$ indique le sens de la parabole.
Le signe de $\Delta$ indique le nombre de points d'intersection avec l'axe des abscisses.

| | $a > 0$ | $a < 0$ |
|---|---|---|
| $\Delta > 0$ |  |  |
| $\Delta = 0$ |  |  |
| $\Delta < 0$ |  |  |

Bonus : si $\Delta > 0$ alors $x1 \times x2 = \frac{c}{a}$ et $x1 + x2 = \frac{-b}{a}$