Dérivation

Dériver les fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{5x+1}{6x-5}$ $\quad D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{6}\right\}$

$f(x) = \frac{9-3x}{7x-5}$ $\quad D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{7}\right\}$

$g(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ $\quad D_g = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

$h(x) = \frac{4x-4}{\sqrt{x}}$ $\quad D_h = \mathbb{R}_+^*$

$i(x) = \frac{5-\frac{1}{x}}{3+\frac{2}{x^2}} = \frac{5x^2-x}{3x^2+2}$ $\quad D_i = \mathbb{R}^*$

$f(x) = \frac{5x-3}{2x+4}$ $\quad D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

Correction

$f(x) = \frac{5x+1}{6x-5}$ $\quad D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{6}\right\}$

Je reconnais $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ ou $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Avec : $u(x) = 5x + 1$, $\quad u'(x) = 5$

$v(x) = 6x - 5$ et $\quad v'(x) = 6$

$f'(x) = \frac{5(6x-5)-(5x+1)6}{(6x-5)^2} = \frac{30x-25-(30x+6)}{(6x-5)^2}$

$= \frac{30x-25-30x-6}{(6x-5)^2} = \frac{-31}{(6x-5)^2}$

$f(x) = \frac{9-3x}{7x-5}$ $\quad D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{7}\right\}$

Je reconnais $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ ou $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Avec : $u(x) = 9 - 3x$, $\quad u'(x) = -3$

$v(x) = 7x - 5$ et $\quad v'(x) = 7$

$f'(x) = \frac{-3(7x-5)-(9-3x)7}{(7x-5)^2} = \frac{-21x+15-(63-21x)}{(7x-5)^2}$

$= \frac{-21x+15-63+21x}{(7x-5)^2} = \frac{-48}{(7x-5)^2}$

$g(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ $\quad D_g = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

Je reconnais $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Avec : $u(x) = 2x$, $\quad u'(x) = 2$

$v(x) = x^2 - 4$ et $\quad v'(x) = 2x$

$g'(x) = \frac{2(x^2-4)-2x2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^2-8-4x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x^2-8}{(x^2-4)^2}$

$h(x) = \frac{4x-4}{\sqrt{x}}$ $\quad D_h = \mathbb{R}_+^*$

Je reconnais $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Avec : $u(x) = 4x - 4$, $u'(x) = 4$

$v(x) = \sqrt{x}$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$h'(x) = \frac{4\sqrt{x}-(4x-4)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} = \frac{4\sqrt{x}-\left(\frac{4x}{2\sqrt{x}}-\frac{4}{2\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}^2} = \frac{4\sqrt{x}-\frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}}{x}$

$= \frac{4\sqrt{x}-2\sqrt{x}+\frac{2\sqrt{x}}{x}}{x} = \frac{2\sqrt{x}+\frac{2\sqrt{x}}{x}}{x}$

Bonus $= \frac{\frac{1}{x}(2x\sqrt{x}+2\sqrt{x})}{x} = 2\frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}{x^2} = 2\sqrt{x}\frac{x+1}{x^2}$

$i(x) = \frac{5-\frac{1}{x}}{3+\frac{2}{x^2}} = \frac{5x^2-x}{3x^2+2}$ $D_i = \mathbb{R}^*$

$f(x) = \frac{5x-3}{2x+4}$ $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

On reconnait $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Avec $u(x) = 5x - 3,$ $u'(x) = 5$

$v(x) = 2x + 4$ et $v'(x) = 2$

Ainsi $f'(x) = \frac{5(2x+4)-(5x-3)2}{(2x+4)^2} = \frac{10x+20-(10x-6)}{(2x+4)^2}$

$= \frac{10x+20-10x+6}{(2x+4)^2} = \frac{26}{(2x+4)^2}$

Exercice

Dériver les fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{2-3x}{2+4x}$ sur $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$g(x) = \frac{9x}{x^2+3}$ sur $D_g = \mathbb{R}$

$h(x) = \frac{9\sqrt{x}}{x^2+x}$ sur $D_h = \mathbb{R} - \{0; -1\}$

$i(x) = \frac{9x^2}{\frac{1}{x}+x} = \frac{9x^3}{1+x^2}$ sur $D_i = \mathbb{R}^*$

$f(x) = (2x + 3)(5x + 9) = 10x^2 + 33x + 27$

correction

$f(x) = \frac{2-3x}{2+4x}$ sur $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

On reconnait $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u(x) = 2 - 3x$, $v(x) = 2 + 4x$, $u'(x) = -3$ et $v'(x) = 4$

Ainsi $f'(x) = \frac{(-3)(2+4x)-(2-3x)4}{(2+4x)^2} = \frac{-6-12x-(8-12x)}{(2+4x)^2}$

$= \frac{-6-12x-8+12x}{(2+4x)^2} = \frac{-14}{(2+4x)^2}$

$g(x) = \frac{9x}{x^2+3}$ sur $D_g = \mathbb{R}$

On reconnait : $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Avec $u(x) = 9x,$ $, u'(x) = 9$

$v(x) = x^2 + 3$ et $v'(x) = 2x$

Ainsi $f'(x) = \frac{9(x^2+3)-(9x)2x}{(x^2+3)^2} = \frac{9x^2+27-18x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{-9x^2+27}{(x^2+3)^2}$

$h(x) = \frac{9\sqrt{x}}{x^2+x}$ sur $D_h = \mathbb{R} - \{0; -1\}$

On reconnait : $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Avec $u(x) = 9\sqrt{x},$ $, u'(x) = \frac{9}{2\sqrt{x}} = \frac{9\sqrt{x}}{2x}$

$v(x) = x^2 + x$ et $v'(x) = 2x + 1$

Ainsi $h'(x) = \frac{\frac{9}{2\sqrt{x}}(x^2+x)-9\sqrt{x}(2x+1)}{(x^2+x)^2} = \frac{\frac{9x^2}{2\sqrt{x}}+\frac{9x}{2\sqrt{x}}-(18x\sqrt{x}+9\sqrt{x})}{(x^2+x)^2}$

$= \frac{\frac{9x^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x}}+\frac{9x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x}}-18x\sqrt{x}-9\sqrt{x}}{(x^2+x)^2} = \frac{\frac{9}{2}x\sqrt{x}+\frac{9}{2}\sqrt{x}-18x\sqrt{x}-9\sqrt{x}}{(x^2+x)^2}$

$= \frac{\frac{-27}{2}x\sqrt{x}-\frac{9}{2}\sqrt{x}}{(x^2+x)^2} = -\frac{27x+9}{2(x^2+x)^2}\sqrt{x}$

$i(x) = \frac{9x^2}{\frac{1}{x}+x} = \frac{9x^3}{1+x^2}$ sur $D_i = \mathbb{R}^*$

On reconnait : $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Avec $u(x) = 9x^3,$ $, u'(x) = 27x^2$

$v(x) = 1 + x^2$ et $v'(x) = 2x$

Ainsi $h'(x) = \frac{27x^2(1+x^2)-9x^3 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{27x^2+27x^4-18x^4}{(1+x^2)^2}$

$= \frac{27x^2+9x^4}{(1+x^2)^2} = \frac{9x^2(3+x^2)}{(1+x^2)^2}$

$$f(x) = (2x + 3)(5x + 9) = 10x^2 + 33x + 27$$

Dériver les fonctions suivantes :

$f(x) = (5x^2 - 3x + 2)(7x + 4)$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

$i(x) = \left(8 - 17x + \frac{3x^7}{5}\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{5x^2}{3} - 4\right)$ $\qquad D_i = \mathbb{R}$

$g(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)(7x + 5)$ $\qquad D_g = \mathbb{R}^*$

$h(x) = (4 - 3\sqrt{x})(\sqrt{x} + 5x)$ $\qquad D_h = \mathbb{R}^+$

$f(x) = (5x^2 - 3x + 2)(7x + 4)$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

Je reconnais $uv \to u'v + uv'$

Avec $\quad u(x) = 5x^2 - 3x + 2 \qquad u'(x) = 5 \times 2x - 3 \times 1 = 10x - 3$

$\quad v(x) = 7x + 4 \qquad v'(x) = 7 \times 1 = 7$

Ainsi $f'(x) = (10x - 3)(7x + 4) + (5x^2 - 3x + 2)7$

$= 70x^2 + 40x - 21x - 12 + (35x^2 - 21x + 14)$

$= 70x^2 + 40x - 21x - 12 + 35x^2 - 21x + 14$

$= 105x^2 - 2x + 2$

$i(x) = \left(8 - 17x + \frac{3x^7}{5}\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{5x^2}{3} - 4\right)$ $\qquad D_i = \mathbb{R}$

Je reconnais $uv \to u'v + uv'$

Avec $\quad u(x) = 8 - 17x + \frac{3}{5}x^7 \qquad u'(x) = -17 + \frac{3}{5}7x^6 = -17 + \frac{21}{5}x^6$

$\quad v(x) = \frac{2}{3} + \frac{5}{3}x^2 - \frac{4\,3}{1\,3} = \frac{2}{3} + \frac{5}{3}x^2 - \frac{12}{3} = \frac{5}{3}x^2 - \frac{10}{3} \qquad v'(x) = \frac{5}{3}2x = \frac{10}{3}x$

Ainsi

$i'(x) = \left(-17 + \frac{21}{5}x^6\right)\left(\frac{5}{3}x^2 - \frac{10}{3}\right) + \left(8 - 17x + \frac{3}{5}x^7\right)\frac{10}{3}x$

$= -17\frac{5}{3}x^2 + 17\frac{10}{3} + \frac{21}{5}x^6\frac{5}{3}x^2 - \frac{21}{5}x^6\frac{10}{3} + 8\frac{10}{3}x - 17x\frac{10}{3}x + \frac{3}{5}x^7\frac{10}{3}x$

$= \frac{-85}{3}x^2 + \frac{170}{3} + 7x^8 - 14x^6 + \frac{80}{3}x - \frac{170x^2}{3} + 2x^8$

$= \frac{-255}{3}x^2 + \frac{170}{3} - 14x^6 + \frac{80}{3}x + 9x^8$

$g(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)(7x + 5)$ $\qquad D_g = \mathbb{R}^*$

Je reconnais $uv \to u'v + uv'$ Avec

$u(x) = \frac{1}{x} + 3\frac{1}{x^2} \qquad u'(x) = -\frac{1}{x^2} + 3\frac{-2}{x^3} = -\frac{1}{x^2} + \frac{-6}{x^3}$

$v(x) = 7x + 5 \qquad v'(x) = 7$

Ainsi

$g'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{-6}{x^3}\right)(7x + 5) + \left(\frac{1}{x} + 3\frac{1}{x^2}\right)7$

$= -\frac{1}{x^2}7x + \frac{-6}{x^3}7x - \frac{1}{x^2}5 + \frac{-6}{x^3}5 + \left(\frac{7}{x} + 3\frac{1}{x^2}7\right)$

$= -\frac{7}{x} + \frac{-42}{x^2} - \frac{5}{x^2} + \frac{-30}{x^3} + \frac{7}{x} + \frac{21}{x^2} = \frac{-30}{x^3} - \frac{26}{x^2}$

$h(x) = (4 - 3\sqrt{x})(\sqrt{x} + 5x)$ $\qquad D_h = \mathbb{R}^+$

Je reconnais $uv \to u'v + uv'$ Avec

$u(x) = 4 - 3\sqrt{x} \qquad u'(x) = -3\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-3}{2\sqrt{x}}$

$v(x) = \sqrt{x} + 5x \qquad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5$

Ainsi $h'(x) = \left(\frac{-3}{2\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} + 5x\right) + \left(4 - 3\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 5\right)$

$= \left(\frac{-3}{2\sqrt{x}}\sqrt{x} + \frac{-3}{2\sqrt{x}}5x\right) + \left(4\frac{1}{2\sqrt{x}} - 3\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}} + 4 \times 5 - 3\sqrt{x}5\right)$

$= \frac{2}{\sqrt{x}} + 17 - \frac{45}{2}\sqrt{x} = \frac{2\sqrt{x}}{x} + 17 - \frac{45}{2}\sqrt{x}$

Séance du 11 janvier

$g(x) = \frac{11x-3}{12x+5}$

Je reconnais $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Avec $u(x) = 11x - 3$, $\qquad u'(x) = 11$

$v(x) = 12x + 5$, $\qquad v'(x) = 12$

Ainsi $g'(x) = \frac{11(12x+5)-(11x-3)12}{(12x+5)^2} = \frac{132x+55-(132x-36)}{(12x+5)^2}$

$= \frac{132x+55-132x+36}{(12x+5)^2} = \frac{91}{(12x+5)^2}$

$h(x) = \frac{3x+4}{x^2-9}$

Je reconnais $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Avec $u(x) = 3x + 4$, $\qquad u'(x) = 3$

$v(x) = x^2 - 9$, $\qquad v'(x) = 2x$

Ainsi $g'(x) = \frac{3(x^2-9)-(3x+4)2x}{(x^2-9)^2} = \frac{3x^2-27-(6x^2+8x)}{(x^2-9)^2}$

$= \frac{3x^2-27-6x^2-8x}{(x^2-9)^2} = \frac{-3x^2-8x-27}{(x^2-9)^2}$

$i(x) = \frac{7}{x+\sqrt{x}} = 7\frac{1}{x+\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_*^+$

Version 1

Je reconnais $\frac{1}{u} \to \frac{-u'}{u^2}$ avec $u(x) = x + \sqrt{x}$ et $u'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Et donc $i'(x) = 7\frac{-\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(x+\sqrt{x}\right)^2} = \frac{-7-\frac{7}{2\sqrt{x}}}{\left(x+\sqrt{x}\right)^2} = \frac{-7-\frac{7\sqrt{x}}{2x}}{\left(x+\sqrt{x}\right)^2} = \frac{-14x-7\sqrt{x}}{2x\left(x+\sqrt{x}\right)^2}$

Version 2

Je reconnais $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Avec $u(x) = 7$, $\qquad u'(x) = 0$

$v(x) = x + \sqrt{x}$, $\qquad v'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Ainsi $i'(x) = \frac{0\left(x+\sqrt{x}\right)-7\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(x+\sqrt{x}\right)^2} = \frac{0-7-\frac{7}{2\sqrt{x}}}{\left(x+\sqrt{x}\right)^2} = \frac{-7-\frac{7\sqrt{x}}{2x}}{\left(x+\sqrt{x}\right)^2} = \frac{-14x-7\sqrt{x}}{2x\left(x+\sqrt{x}\right)^2}$

$j(x) = (7 - 3x)(2x^2 - 3x + 4)$

Je reconnais $uv \rightarrow u'v + uv'$

Avec $u(x) = 7 - 3x$, $u'(x) = -3$

$v(x) = 2x^2 - 3x + 4$, $v'(x) = 4x - 3$

Ainsi $j'(x) = -3(2x^2 - 3x + 4) + (7 - 3x)(4x - 3)$

$= -6x^2 + 9x - 12 + (28x - 21 - 12x^2 + 9x)$

$= -6x^2 + 9x - 12 + 28x - 21 - 12x^2 + 9x$

$= -18x^2 + 46x - 33$

Avec géogebra :