Chapitre 1 – Le second degré

I. Fonctions trinômes :

Définition :
On appelle fonction trinôme ou encore polynôme du second degrés toute fonction de la forme $f: x \to ax^2 + bx + c$ avec , b, et c trois réels (avec $a \neq 0$)

Exemple :
$f(x) = 3x^2 + 5x$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = 3$, $b = 5$ et $c = 0$
$g(x) = 7x^3 - 5x + 2$ est pas du troisième degré donc ce n'est pas une fonction trinôme

Propriété :
La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une parabole.
La valeur de a determine l'ouverture de la parabole, et son orientation tournée vers le haut si $a > 0$ vers le bas si $a < 0$.
La valeur de c est l'ordonnée à l'origine, elle donne l'endroit où la parabole coupera l'axe des ordonnées.
La valeur de b indique de quel côté du point d'intersection avec l'axe des ordonnés la parabole va glisser.

Définition :
On dit que le réel x_0 est une racine de la fonction f si et seulement si $f(x_0) = 0$

II. Equation second degré :

Définition :
Une <u>équation du second degré</u> x en x est une équation qui peut s'écrire sous la forme $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ où a, b et c sont trois réels avec $a \neq 0$.

Exemples :
L'équation $(x - 3)^2 + 4 = 0$ est équivalente à $x^2 - 6x + 13 = 0$, c'est donc une équation du second degré dans laquelle $a = 1$, $b = -6$ et $c = 13$.
L'équation $(x + 5)^2 - (x + 2)(x + 4)$ est équivalente à $4x + 13 = 0$, ce n'est donc pas une équation du second degré car $a = 0$.
Autres équations du second degré : $x^2 + 9 = 0$; $5x^2 - 6x = 0$.

Définition :
On appelle <u>discriminant</u> de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$), le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.
Il permettra de prévoir le nombre de solution de l'équation

Exemple :
Le discriminant de l'équation $x^2 - 8x + 19 = 0$ est le nombre Δ tel que :
$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 19 = 64 - 76 = -12$

Bonus
Définition :
Tout trinôme du second degrés $ax^2 + bx + c$ peut être écrit sous la forme $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$. Cette écriture est appelée forme canonique du trinôme.

Démonstration :
$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + x\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right] \quad \textit{Je factorise par a (pour éviter de les racines dans la suite)}$$
$$= a\left[x^2 + \underbrace{2x\frac{b}{2a}}_{\text{double produit}} + \underbrace{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}}_{\text{le carré et sa compensation}} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$ *je factorise mon identité remarquable*

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right]$$ *je mets au même dénominateur*

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$ *J'ajoute mes deux fractions*

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Théorème :

Résolution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$. $\Delta = b^2 - 4ac$.	
Lorsque $\Delta < 0$	L'équation n'a pas de solution.
Lorsque $\Delta = 0$	L'équation a une solution (dite racine double) $x_0 = \frac{-b}{2a}$
Lorsque $\Delta > 0$	L'équation a deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Bonus

Démonstration :

$0 = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow 0 = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ *on reconnais une équation produit nul, ce qui veut dire que soit* a *est nul soit c'est* $\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ *or* a *ne l'est pas donc les solutions de l'équations sont données par les racines du crochet.*

Si $\Delta < 0$ *alors* $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ *et donc le crochet aussi donc il ne s'annule jamais donc* $S = \{\emptyset\}$

Si $\Delta = 0$ *alors* $\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$ *donc* $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

Si $\Delta > 0$ $\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$ *je vais factoriser, et pour cela je dois avoir une différence de carrés :*

$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\left(x+\frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \left[x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right] = 0$ *ou* $\left[x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right] = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ *ou* $x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow S = \left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

Exemple 1 :

$x^2 - 3x = -4$ Ecrivons l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$

$x^2 - 3x + 4 = 0$ Ici $a = 1$, $b = -3$ et $c = 4$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 - 16 = -7$ $\Delta < 0$ donc l'équation n'a pas de solution : $S = \{\emptyset\}$

Exemple 2 :

$3x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{48} = 0$

$\Delta = \frac{49}{4} - 4 \times 3 \times \frac{49}{48} = \frac{49}{4} - \frac{4\times3\times49}{4\times3\times4} = \frac{49}{4} - \frac{49}{4} = 0$

$\Delta = 0$ donc l'équation admet une seule solution $x_0 = \frac{-b}{2a}$ c'est-à-dire $x_0 = \frac{\frac{7}{2}}{6} = \frac{7}{12}$ $S = \left\{\frac{7}{12}\right\}$

Corollaire :

Considérons le trinôme du second degré définie sur ℝ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

- Lorsque ce trinôme a deux racines x_1 et x_2, alors pour tout réel x, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Lorsque ce trinôme a une seule racine x_0, alors pour tout réel x, $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- Lorsque ce trinôme n'a pas de racine il ne peut pas être factorisé.

Exemple :

Factoriser $f(x) = 3x^2 - x - 4$.

$\Delta = 1 - 4 \times (-12) = 1 + 48 = 49$

f possède deux racines $x_1 = \frac{1-7}{6} = -1$ et $x_2 = \frac{1+7}{6} = \frac{4}{3}$

Donc pour tout réel x, $f(x) = 3(x+1)\left(x - \frac{4}{3}\right)$.

Des factorisations on peut déduire :

Propriété
Soit P(x) un polynôme du second degré de discriminant Δ
Si Δ> 0 P(x) est du signe de a en dehors des racines c'est-à-dire quand $x < x_1$ ou que $x > x_2$. P(x) sera du signe contraire à celui de a si on est entre les racines $x_1 < x < x_2$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Si Δ= 0 P(x) est du signe de a sauf en $-\frac{b}{2a}$ ou il s'annule

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de a	

Si Δ< 0 P(x) est toujours du signe de a.

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	

Pour résumer ax²+bx+c = 0 est du signe a sauf quand Δ>0 et que x est compris entre x_1 et x_2.

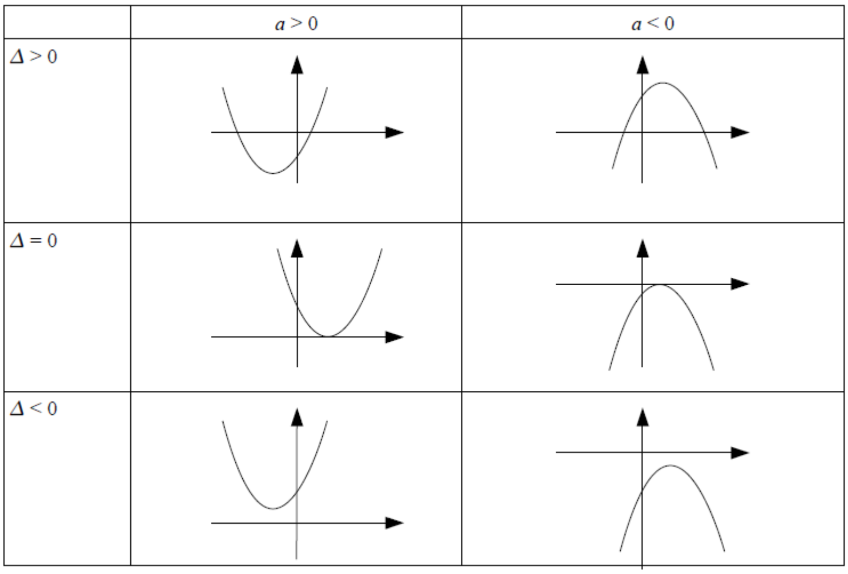
Propriété
$f(x) = ax^2 + bx + c$ atteint son extremum pour $x = -\frac{b}{2a}$ et il vaut : $-\frac{\Delta}{4a}$
C'est un minimum si $a > 0$ un maximum si $a < 0$

III. Position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses :

Soit P une parabole d'équation y = ax² + bx + c.
Il n'est pas possible d'avoir une idée précise de cette parabole mais nous pouvons la situer par rapport à l'axe des abscisses.
En effet :
- Lorsque Δ ≥ 0, l'équation ax² + bx + c = 0 a des solutions, donc la parabole P rencontre l'axe des abscisses.
- Lorsque Δ < 0, l'équation ax² + bx + c = 0 n'a pas de solution, donc la parabole P ne rencontre pas l'axe des abscisses.

De plus si a > 0, la parabole P est "tournée vers le haut" et si a < 0, la parabole P est "tournée vers le bas".

Le tableau ci-contre donne toutes les situations possibles d'une parabole P par rapport à l'axe des abscisses selon les signes de Δ et de a.



IV. Interprétation graphique des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

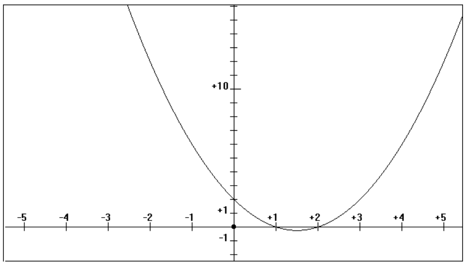
De manière générale considérons l'équation $ax^2 + bx + c= 0$ avec $a \neq 0$
Notons f la fonction trinôme du second degré : $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

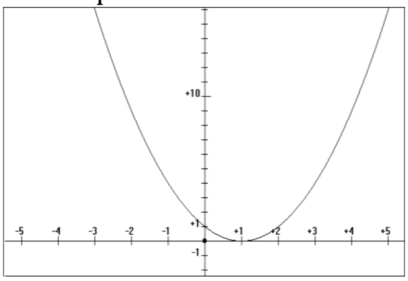
Notons P la parabole représentant f dans un repère choisi.
<u>Graphiquement</u> les solutions de $ax^2 + bx + c= 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la parabole P avec l'axe des abscisses.

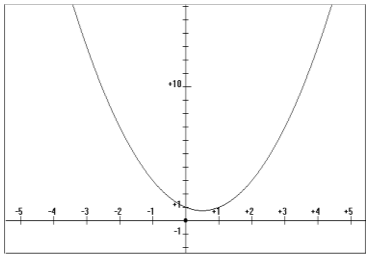
<u>Exemples :</u>
Considérons les fonctions trinômes f, g et h définies respectivement, pour tout réel x par :

$f(x) = x^2 - 3x + 2$ $\qquad$ $g(x) = (x - 1)^2$ $\qquad$ $h(x) = x^2 - x + 1$

Notons respectivement C_f, C_g et C_h leurs courbes représentatives.







C_f coupe l'axe des abscisses en 2 points. $\qquad$ L'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ admet 2 solutions : 1 et 2
C_g coupe l'axe des abscisses en un point. $\qquad$ L'équation $(x - 1)^2 = 0$ a une solution : 1
C_h ne coupe pas l'axe des abscisses. $\qquad$ L'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'a pas de solution.
Retrouvons ces résultats par le calcul :

$f(x) = 0$
$x^2 - 3x + 2 = 0$
$\Delta = 9 - 8 = 1$
$x_1 = \frac{3-1}{6} = -1, x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$
$S = \{1 ; 2\}$

$g(x) = 0$
$(x - 1)^2 = 0$
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$\Delta = 4 - 4 = 0$
$x_0 = \frac{2}{2} = 1$
$S = \{1\}$

$h(x) = 0$
$x^2 - x + 1 = 0$
$\Delta = 1 - 4 = -3$
$S = \varnothing$