Nom & Prénom : …………………………………………………………… www.dimension-k.com

Devoir surveillé n°3

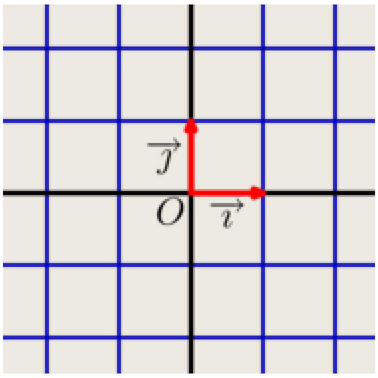
Feuille à coller sur la première page de votre copie double

Exercice 1

Soit les complexes suivants :

$z_A = 2 + i \quad z_B = -2 - i \qquad z_C = -1 + 2i \qquad z_D = 7 - 5i$

1) Effectuez les calculs suivants
   a. $z_A + z_C$
   b. $z_{\overrightarrow{AB}}$ (rappel : ça vaut $z_B - z_A$), $z_{\overrightarrow{AC}}$ et $z_{\overrightarrow{CB}}$
   c. $z_A \times z_C$
   d. $\frac{z_D}{z_C}$
2) Placer les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C dans le repère ci-contre.
3) Conjecturer la nature du triangle ABC
4) Déterminer AB (rappel : ça vaut $|z_{\overrightarrow{AB}}|$) , AC et BC
5) Confirmer ou infirmer votre conjecture.



Exercice 2

Convertir en écriture trigonométrique les nombres complexes suivants :

$z_E = 3\sqrt{3} + 3i \qquad z_F = 13$

Angle x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Exercice 3

Soit les nombres complexes suivants : $z_J = \left[5; \frac{\pi}{4}\right]$, $\qquad z_K = [7; \pi]$ et $\qquad z_L = \left[2; \frac{\pi}{6}\right]$

Donner l'écriture trigonométrique des valeurs des expressions complexes suivantes :

1) $(z_L)^6$ 2) $\overline{z_J} \times (-z_K)$ 3) $\frac{z_J}{z_L}$

Exercice 4

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $3z + 5 = 8 - 3i$
2) Résoudre dans $\mathbb{C} - \{-5i\}$ l'équation suivante : $\frac{3z-6+i}{z+5i} = -7i$

Exercice 5

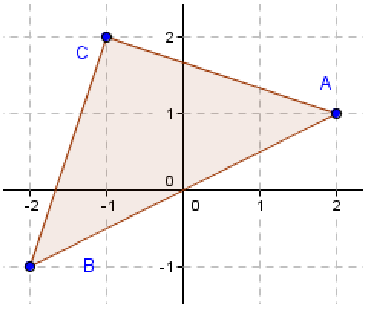
Le but de l'exercice est de résoudre l'inéquation $(2x^2 - 4x - 70)(5 - 4x) \geq 0$

Vous pouvez suivre les étapes suivantes (ou pas, c'est comme vous voulez)

1) Résoudre $2x^2 - 4x - 70 = 0$ et $5 - 4x = 0$
2) Faire le tableau de signe de l'expression $2x^2 - 4x - 70$
3) Résoudre $5 - 4x \geq 0$
4) Quelles sont les valeurs d'annulation de $(2x^2 - 4x - 70)(5 - 4x)$
5) Déduire des questions précédentes le tableau de signe de $(2x^2 - 4x - 70)(5 - 4x)$
6) En déduire les solutions de l'équation : $(2x^2 - 4x - 70)(5 - 4x) \geq 0$
7)

Correction

Exercice 1



$a)\ z_A + z_C = 1 + 3i$

b) $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -2 - i - (2+i) = -4 - 2i,$

$z_{\overrightarrow{AC}} = -1 + 2i - (2+i) = -3 + i$

$z_{\overrightarrow{CB}} = -2 - i - (-1+2i) = -1 - 3i$

c) $z_A \times z_C = (2+i)(-1+2i) = -2 + 4i - i - 2 = -4 + 3i$

d) $\frac{z_D}{z_C} = \frac{(7-5i)}{(-1+2i)} = \frac{(7-5i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{-7-14i+5i-10}{(-1)^2+2^2} = \frac{-17-9i}{5}$

2) 3) Le triangle a l'aire isocèle et rectangle en C

4) $\left|z_{\overrightarrow{AB}}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\left|z_{\overrightarrow{AC}}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (+1)^2} = \sqrt{10}$ $\left|z_{\overrightarrow{CB}}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$

5) on remarque que AC=CB et $AC^2 + CB^2 = AB^2$ donc d'après la réciproque de Pythagore le triangle est rectangle et isocèle en C

Exercice 2

$|z_E| = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6$ $\begin{cases} \cos\theta_E = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_E = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{cases}$ donc $\theta_E = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$|z_F| = \sqrt{13^2 + 0^2} = 13$ $\begin{cases} \cos\theta_F = \frac{13}{13} = 1 \\ \sin\theta_F = \frac{0}{13} = 0 \end{cases}$ donc $\theta_F = 0 + 2k\pi$

Exercice 3

1) $(z_L)^6 = \left[2; \frac{\pi}{6}\right]^6 = \left[2^6; 6 \times \frac{\pi}{6}\right] [64; \pi]$
2) $\overline{z_J} \times (-z_K) = \overline{\left[5; \frac{\pi}{4}\right]} \times (-[7;\pi]) = \left[5; -\frac{\pi}{4}\right] [7; \pi + \pi] = \left[5 \times 7; 2\pi - \frac{\pi}{4}\right] = \left[35; \frac{7\pi}{4}\right]$
3) $\frac{z_J}{z_L} = \frac{\left[5;\frac{\pi}{4}\right]}{\left[2;\frac{\pi}{6}\right]} = \left[\frac{5}{2}; \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right] = \left[\frac{5}{2}; \frac{2\pi}{24}\right] = \left[\frac{5}{2}; \frac{\pi}{12}\right]$

Exercice 4

1) $3z + 5 = 8 - 3i \quad \Leftrightarrow \quad 3z = 3 - 3i \quad \Leftrightarrow \quad z = 1 - i$
2) dans $\mathbb{C} - \{-5i\}$ $\frac{3z-6+i}{z+5i} = -7i \Leftrightarrow 3z - 6 + i = -7i(z+5i) \Leftrightarrow 3z - 6 + i = -7iz - 35i^2$

$\Leftrightarrow 3z + 7iz = 6 - i + 35 \quad \Leftrightarrow (3+7i)z = (41-i) \quad \Leftrightarrow z = \frac{41-i}{(3+7i)} \quad \Leftrightarrow z = \frac{(41-i)(3-7i)}{(3+7i)(3-7i)}$

$\Leftrightarrow z = \frac{123-287i-3i+7i^2}{9+49} \Leftrightarrow z = \frac{116-290i}{58} \Leftrightarrow z = 2 - 5i$

Exercice 5

Le but de l'exercice est de résoudre l'inéquation $(2x^2 - 4x - 70)(5 - 4x) \geq 0$

Vous pouvez suivre les étapes suivantes (ou pas, c'est comme vous voulez)

1) $5 - 4x = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4} = x$ et pour $2x^2 - 4x - 70 = 0$ cherchons le discriminant :

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (-70) = 16 + 560 = 576$ donc deux racines $x_1 = \frac{4-\sqrt{576}}{4} = -5$ et $x_2 = \frac{4+\sqrt{576}}{4} = 7$

1) Faire le tableau de signe de l'expression $2x^2 - 4x - 70$
2) Résoudre $5 - 4x \geq 0$
3) Quelles sont les valeurs d'annulation de $(2x^2 - 4x - 70)(5 - 4x)$ elles sont -5, $\frac{5}{4}$ et 7
4) Déduire des questions précédentes le tableau de signe de $(2x^2 - 4x - 70)(5 - 4x)$
5) En déduire les solutions de l'équation : $(2x^2 - 4x - 70)(5 - 4x) \geq 0$

$$S =]-\infty; -5] \cup \left[\frac{5}{4}; 7\right]$$