Nombres complexes

I. Définitions / propriétés

Définition

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ et appelé ensemble des nombres complexes qui vérifie les propriétés suivantes : i

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- l'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celle de $\mathbb{R}$ et les règles de calcul restent les mêmes
- Le nombre complexe i est tel que $i^2 = -1$
- Un nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme $a + ib$; $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

Définition :

On dit que a + bi est la forme algébrique du nombre complexe z.
a est la partie réelle de z, on note $a = \text{Re}(z)$ et b est la partie imaginaire de z, on note $b = \text{Im}(z)$.

Exemple :
$z_A = 2 + 5i$ a pour partie réelle 2 et pour partie imaginaire 5.

Définition :

Les complexes de la forme bi avec $b \in$ IR, sont appelés imaginaires purs.

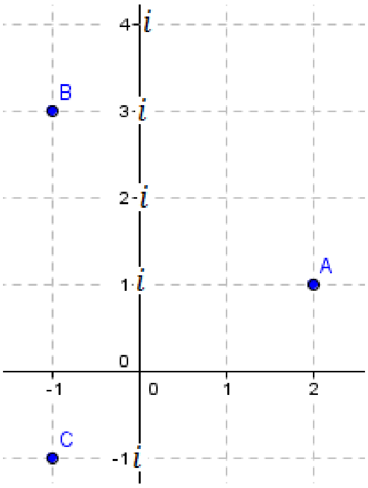
Propriété :

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

II. représentation graphique, somme et conjugué

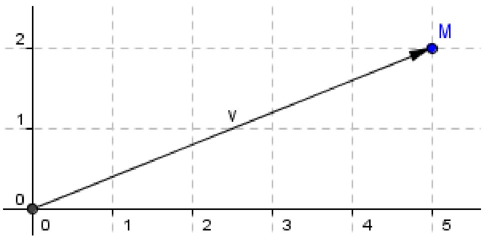
Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, au nombre complexe $a + ib$, on peut associer le point M(a ; b) ou le vecteur $\vec{v}$(a ; b).

- L'axe des **abscisses** est appelé l'axe des **réels** L'axe des **ordonnées** est appelé l'axe des **imaginaires**.
- $z = a + bi$ est **l'affixe** du point M d'abscisse a et d'ordonnée bi.



Exemples :
Les points A, B et C sont respectivement d'affixes $z_A = 2 + i$, $z_B = -1 + 3i$ et $z_C = -1 - i$
On pourra demander aux élèves de placer d'autres points

- $z = a + bi$ est aussi **l'affixe** du vecteur $\vec{v}$(a ; b) , vecteur ayant pour aussi pour représentant $\overrightarrow{OM}$ avec M le point d'abscisse a et d'ordonnée bi.

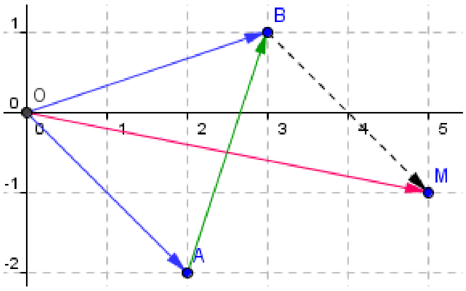


Exemple :
si on a = $5 + 2i$, alors ce complexe est l'affixe du point M(5 ;2) et du vecteur $\vec{v}(5; 2)$

Remarque :
en général on notera z_M l'affixe de M, et $z_{\vec{v}}$ celle de $\vec{v}$

Si A est d'affixe $z = a + ib$ et si B a pour affixe $z' = a' + ib'$, alors $z_{\overrightarrow{AB}} = z' - z = (a' - a) + i(b' - b)$

Exemple



ici $z_A = 2 - 2$ et $z_B = 3 + i$ M est le point d'affixe $z_M = z_A + z_B$
Dans ce cas $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

En vert on peut voir le vecteur $\overrightarrow{AB}$
D'après la relation de chasles on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
On remarquera la correspondance $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = z_{\overrightarrow{OB}} - z_{\overrightarrow{OA}}$

- le milieu I de $[MM']$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z+z'}{2}$

• On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$

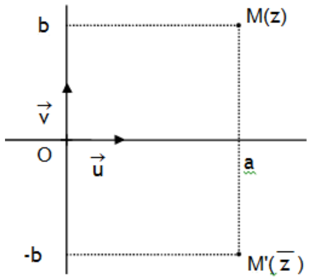
<u>Propriétés</u> : $\overline{\overline{z}} = z$; $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;

$\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$

Si z' # 0 $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$; $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

z est réel $\Leftrightarrow$ $z = \overline{z}$ z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $z = -\overline{z}$



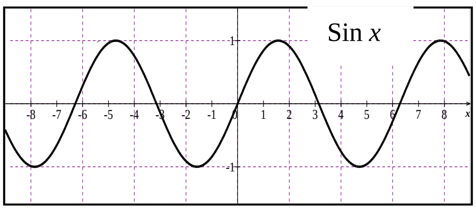
III. Rappels de trigonométrie

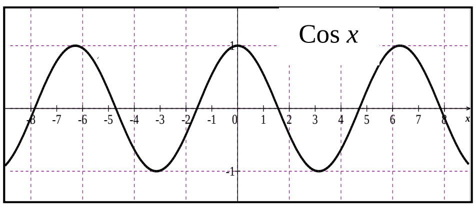
Dans le cadre d'un triangle ABC rectangle en B on a pour n'importe quel des deux angles aigus :
$\mathbf{Cos}(\alpha) = \dfrac{Adj}{Hyp}$, $\mathbf{Sin}(\alpha) = \dfrac{Opp}{Hyp}$ et $\mathbf{Tan}(\alpha) = \dfrac{Opp}{Adj} = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ Moyen mnémotechnique : **CAH SOH TOA**
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Rappels de seconde
Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O, le centre du repère, de rayon 1 et pourvu d'un sens direct : le sens contraire du déplacement des aiguilles d'un montre.

A chaque point B du cercle trigonométrique on peut associer une infinité de mesure de la forme : $\widehat{AM} + 2k\pi$. Ce sont les mesures de l'angle $\alpha = \left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right)$. Le point M aura pour coordonnées : $M(\cos(\alpha)\,;\sin(\alpha))$.

La longueur AC correspond à la valeur absolue de la tangente.
La fonction cosinus est paire et 2π périodique
La fonction sinus est impaire et 2π périodique

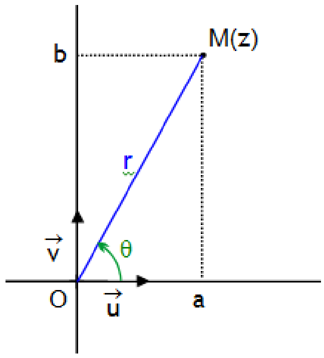




<u>Valeurs importantes</u>

Angle x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

III. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul



Définition

Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme :

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec $\theta \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_+^*$

C'est la forme trigonométrique de z.

r est le module de z, on le note |z| et il vaut $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

θ est un argument de z.

Exemples :

Soit A ,B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2+2i$, $z_B = 5i$ et $z_C = 3+3\sqrt{3}i$

Déterminer les modules et arguments de ces trois complexes.

$|z_A| = |2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta_A = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_A = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{donc } \theta_A = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors

- $\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$
- $-z = r(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi))$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

1) Module d'un nombre complexe

Propriétés : $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $|-z| = |z|$; $|z+z'| \leq |z| + |z'|$

$|zz'| = |z|.|z'|$; $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Propriétés (module et conjugués) :

$|\bar{z}| = |z|$ $\quad z.\bar{z} = |z|^2$ (donc $z.\bar{z}$ est un réel positif) $\quad z.\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

Si M a pour affixe z et si M' a pour affixe z' alors OM = |z| et MM' = |z' - z|

Si $\vec{u}$ a pour affixe z , alors $\|\vec{u}\| = |z|$.

2) Argument d'un nombre complexe

L'argument d'un nombre complexe z n'est pas unique, il est défini modulo 2π.

Si θ est un argument de z, on notera $\arg z = \theta\ [2\pi]$ ou $\arg z = \theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

On appelle argument principal de z l'argument de z appartenant à]-π ; π].

Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$, on a $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg z = \arg z' + 2k\pi \end{cases}$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z et z'

On a alors $(\vec{I},\vec{u}) = \arg z\ [2\pi]$ et $(\vec{u},\vec{u'}) = \arg z' - \arg z\ [2\pi]$

z et z' étant deux nombres complexes non nuls on a :

- $\arg(zz') = \arg z + \arg z'\ [2\pi]$; $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'\ [2\pi]$; $\arg(z^n) = n \arg z\ [2\pi]$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg z\ [2\pi]$; $\arg(-z) = \arg z + \pi\ [2\pi]$