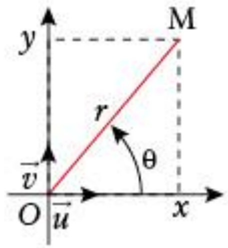
## Conversion de l'écriture algébrique vers la trigonométrique

**Définition :**
Un nombre complexe a une écriture de la forme $z = a + ib$ ($a$ étant la partie réelle et $b$ la partie imaginaire) , il a aussi des écritures de la forme $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r;\theta]$ appelées écritures trigonométriques classique ou compactes ($r = |z|$ est le module de $z$ et $\theta = \arg(z)$ est un argument de $z$.)




**Methode pour déterminer les écritures trigonométriques** (avec $a > 0$ et $b > 0$)
Soit $z = a + ib$ un complexe dont on cherche l'écriture trigonométrique.
$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ il faut simplifier au maximum cette écriture.
$\begin{cases}\cos(\theta) = \frac{a}{r}\\ \sin(\theta) = \frac{b}{r}\end{cases}$ on effectue et simplifie au maximum ces deux résultat et on utilise le tableau de valeurs du cosinus et du sinus pour déterminer un des modules possible, et on écrira en conclusion $\theta = argument\ trouvé + 2k\pi$

**Exemple :** Convertir $z_B = 3 + \sqrt{3}i$ $\quad z_F = -4 \quad z_G = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$

$$|z_B| = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2\times 3} = \sqrt{2^2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{cases}\cos(\theta_B) = \frac{a}{r} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_B) = \frac{b}{r} = \frac{1}{2}\end{cases} \text{ donc } \theta_B = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

**Erreurs classiques**
Pour le module : il n'y a jamais de $i$ dans le calcul et les nombres $a$ et $b$ doivent être protégés par des parenthèses s'ils sont négatifs ou composés

Si $z_A = 2\sqrt{3} - 5i$ alors $|z_A| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-5)^2} = \sqrt{2^2\sqrt{3}^2 + 25} = \sqrt{12+25}$

Quand, à la recherche de l'argument on commence par écrire son cosinus et son sinus on doit bien préciser l'angle en question :
$cos = \frac{a}{r}$ n'a pas de sens, contrairement à $\cos\theta = \frac{a}{r}$

## Opération en écriture Trigonométriques

**Formules**

| **Opération** | **Module** | **argument** |
|---|---|---|
| Produit | $\lvert z_A z_B\rvert = \lvert z_A\rvert\lvert z_B\rvert$ | $\arg(z_A z_B) = \arg(z_A) + \arg(z_B) + 2k\pi$ |
| Quotient | $\left\lvert\frac{z_A}{z_B}\right\rvert = \frac{\lvert z_A\rvert}{\lvert z_B\rvert}$ | $\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \arg(z_E) - \arg(z_B) + 2k\pi$ |
| Puissance | $\lvert(z_A)^n\rvert = \lvert z_A\rvert^n$ | $\arg((z_A)^n) = n\times\arg(z_A) + 2k\pi$ |
| Opposé | $\lvert -z_B\rvert = \lvert z_B\rvert$ | $\arg(-z_B) = \arg(z_B) + \pi + 2k\pi$ |
| conjugué | $\lvert\overline{z_B}\rvert = \lvert z_B\rvert$ | $\arg(\overline{z_B}) = -\arg(z_B) + 2k\pi$ |

**Méthode de calcul :**
On traite le module et l'argument séparément (en tout cas cette année)
On écrira que le module de l'expression vaut … et là on utilisera chacune des formules nécessaires, l'une après l'autre, dans l'ordre de lecture du tableau (produits et quotients en premier, puis puissance et finalement conjugués et opposés)
Pour les arguments on procédera de la même manière.

**Exemples :**
Posons $z_A = \left[3\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$,$z_E = \left[4;\frac{\pi}{6}\right]$ et $z_G = \left[\frac{2}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ et calculons $(\overline{z_A})^6$ et $\frac{z_A(-z_E)}{z_G}$

$$|(\overline{z_A})^6| = |\overline{z_A}|^6 = |z_A|^6 = \left(3\sqrt{2}\right)^6 = 3^6\sqrt{2}^6 = 729\times 4 = 2916$$
$$\arg((\overline{z_A})^6) = 6\arg(\overline{z_A}) + 2k\pi = 6(-\arg(z_A)) + 2k\pi = -\frac{6\pi}{4} + 2k\pi$$
$$= -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{donc } (\overline{z_A})^6 = \left[2916; -\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\left|\frac{z_A(-z_E)}{z_G}\right| = \frac{|z_A(-z_E)|}{|z_G|} = \frac{|z_A||(-z_E)|}{|z_G|} = \frac{|z_A||z_E|}{|z_G|} = \frac{3\sqrt{2}\times 4}{\frac{2}{3}} = 3\sqrt{2}\times 4\times\frac{3}{2} = 18\sqrt{2}$$
$$\arg\left(\frac{z_A(-z_E)}{z_G}\right) = \arg\left(z_A(-z_E)\right) - \arg(z_G) + 2k\pi$$
$$= \arg(z_A) + \arg\left((-z_E)\right) - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{\pi}{4} + \arg(z_E) + \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \qquad \text{donc } \frac{z_A(-z_E)}{z_G} = \left[18\sqrt{2}; \frac{13\pi}{12}\right]$$

# Résolution d'équations et de systèmes dans $\mathbb{C}$

Les méthodes restent les mêmes que dans $\mathbb{R}$

**Equation simple :**
$5z - 7 = 22i - 4iz$
D'abord on regroupe les termes en $z$ d'un côté, le reste de l'autre.
$\Leftrightarrow 5z + 4iz = 7 + 22i$
On factorise par rapport à $z$ $\quad (5 + 4i)z = 7 + 22i$
On divise à gauche et à droite par la quantité de z : $z = \frac{7+22i}{5+4i}$
On simplifie : $z = \frac{(7+22i)(5-4i)}{(5+4i)(5-4i)} \Leftrightarrow z = \frac{35-28i+110i-88i^2}{25+16}$
$\Leftrightarrow z = \frac{123+82i}{41} \Leftrightarrow z = 3 + 2i$

**Systèmes d'équation (substitution)**

$\begin{cases} 2z_1 + z_2 = 2 + i \\ 2iz_1 + 2z_2 = -4 - 4i \end{cases}$ D'abord on isole une inconnue

$\Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = 2 + i - 2z_1 \\ 2iz_1 + 2z_2 = -4 - 4i \end{cases}$ on substitue

$\Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = 2 + i - 2z_1 \\ 2iz_1 + 2(2 + i - 2z_1) = -4 - 4i \end{cases}$ on résout la 2nd équation

$\Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = 2 + i - 2z_1 \\ 2iz_1 + 4 + 2i - 4z_1 = -4 - 4i \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = 2 + i - 2z_1 \\ (2i - 4)z_1 = -4 - 4i - 4 - 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = 2 + i - 2z_1 \\ z_1 = \frac{-8-6i}{2i-4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = 2 + i - 2z_1 \\ z_1 = \frac{(-8-6i)(-2i-4)}{(2i-4)(-2i-4)} \end{cases}$ on multiplie par le conjugué du dénominateur

$\Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = 2 + i - 2z_1 \\ z_1 = \frac{16i+32+12i^2+24i}{4+16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = 2 + i - 2z_1 \\ z_1 = \frac{20+40i}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = 2 + i - 2(1 + 2i) \\ z_1 = 1 + 2i \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = 2 + i - 2 - 4i \\ z_1 = 1 + 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = -3i \\ z_1 = 1 + 2i \end{cases}$

# Géométrie complexe (1ère)

Généralement on vous demandera de donner la nature de triangles ou de quadrilatères.

Un nombre complexe $3 + 5i$ peut être l'affixe d'un point A situé à 3 en abscisse et 5 en ordonnée, mais il peut être aussi l'affixe d'un vecteur $\vec{u}$ qui correspond à un déplacement de 3 vers la droite et 5 vers le haut.

**Relations fondamentales :**
$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ affixe du point d'arrivée moins affixe du point de départ
$AB = |z_{\overrightarrow{AB}}|$

**Exemple :** nature de ABC avec $z_A = 2 + i \quad z_B = -2 - i \quad z_C = -1 + 2i$
$|z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_B - z_A| = |-4 - 2i| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
$|z_{\overrightarrow{AC}}| = \sqrt{(-3)^2 + (+1)^2} = \sqrt{10} \qquad |z_{\overrightarrow{CB}}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$
on remarque que AC=CB donc le triangle est rectangle et isocèle en C et vu que $AC^2 + CB^2 = AB^2$ d'après la réciproque de Pythagore le triangle est aussi rectangle en C

## Simplification de racine

On utilise deux propriétés : si $a > 0$ et $b > 0$ alors : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\sqrt{a^2} = a$
**Methode** : on décompose le radicande en produit de facteurs en regroupant les carrés quand on les vois, si on n'en voit pas on continue de décomposer. Chaque carré pourra sortir de la racine en perdant sa puissance.
**Exemple** : Simplifier : $\sqrt{360}$
Version 1 : $360 = 2 \times 180 = 2 \times 2 \times 90 = 2^2 \times 2 \times 45$
$= 2^2 \times 2 \times 5 \times 9 = 2^2 \times 2 \times 5 \times 3^2$
donc $\sqrt{360} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 2 \times 5} = 2 \times 3\sqrt{2 \times 5} = 6\sqrt{10}$
Version 2 Je vois que $360 = 36 \times 10 = 6^2 \times 10$ donc $\sqrt{360} = \sqrt{6^2 \times 10} = 6\sqrt{10}$

Exercice :Simplifier les racines suivantes :
$\sqrt{196} \qquad \sqrt{192} \qquad \sqrt{6300} \qquad \sqrt{3528} \qquad \sqrt{972}$

Solutions dans le désordre : $36\sqrt{2}$, $8\sqrt{3}$, $30\sqrt{7}$, $14$, $42\sqrt{2}$

**Sujet : Fenêtre**

**Exercice 1**

Convertir en écriture trigonométrique les expressions suivantes :

$z_A = 3 + 3i$ $\qquad z_C = 5i$ $\qquad z_E = 2\sqrt{3} + 2i$ $\qquad z_G = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$

**Exercice 2**

On pose $z_I = 5 - 3i$, $z_J = -4 + 2i$ et $z_K = -6 - 3i$

Calculer $z_I \times \overline{z_J}$, $\qquad \frac{z_I}{z_K}$, $\qquad \overline{\left(\frac{z_I}{z_K}\right)}$,

Correction

Sujet fenêtre

Exercice 1

Convertir en écriture trigonométrique les expressions suivantes :

$z_A = 3 + 3i = \left[3\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right]$ $\qquad z_C = 5i$=$[5 ; \frac{\pi}{2}]$

$z_E = 2\sqrt{3} + 2i = \left[4; \frac{\pi}{6}\right]$ $\qquad z_G = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i = \left[\frac{2}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$

Exercice 2

On pose $z_I = 5 - 3i$, $z_J = -4 + 2i$ et $z_K = -6 - 3i$

$z_I \times \overline{z_J} = -26 + 2i$, $\qquad \frac{z_I}{z_K} = \frac{-21+33i}{45}$, $\qquad \overline{\left(\frac{z_I}{z_K}\right)} = \frac{-21-33i}{45}$,

**Sujet : Ordinateur**

**Exercice 1**

Convertir en écriture trigonométrique les expressions suivantes :

$z_B = 3 + \sqrt{3}i$ $\qquad z_D = 2 + 2i$ $\qquad z_F = -4$ $\qquad z_H = \frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{i}{5}$

**Exercice 2**

On pose $z_I = 5 - 3i$, $z_J = -4 + 2i$ et $z_K = -6 - 3i$

Calculer $\overline{z_I} \times z_J$, $\qquad \frac{z_K}{z_J}$, $\qquad \overline{\left(\frac{z_K}{z_J}\right)}$

Correction

Sujet ordinateur

Exercice 1

Convertir en écriture trigonométrique les expressions suivantes :

$z_B = 3 + \sqrt{3}i = \left[2\sqrt{3}; \frac{\pi}{6}\right]$ $\qquad z_D = 2 + 2i = \left[2\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right]$

$z_F = -4 = [4; \pi]$ $\qquad z_H = \frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{i}{5} = \left[\frac{2}{5}; \frac{\pi}{6}\right]$

Exercice 2

On pose $z_I = 5 - 3i$, $z_J = -4 + 2i$ et $z_K = -6 - 3i$

$\overline{z_I} \times z_J = -26 - 2i$, $\qquad \frac{z_K}{z_J} = \frac{18+24i}{20}$, $\qquad \overline{\left(\frac{z_K}{z_J}\right)} = \frac{18-24i}{20}$