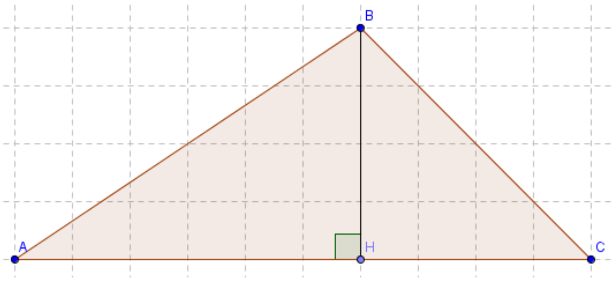
Correction du Devoir maison : Introduction des produits scalaires

Soients A,B et C trois points du plan, on définit Δ par la relation suivante,$\Delta = AB^2 + AC^2 - BC^2$

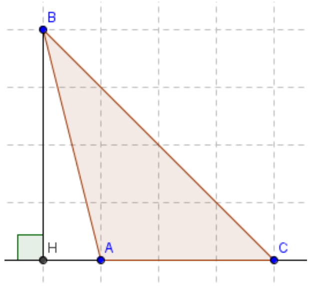
Partie I : reformulation en utilisant le cosinus

1) Etablir les relations $BC^2 = HC^2 + HB^2$ et $AB^2 = HA^2 + HB^2$. En déduire que $\Delta = HA^2 + AC^2 - HC^2$

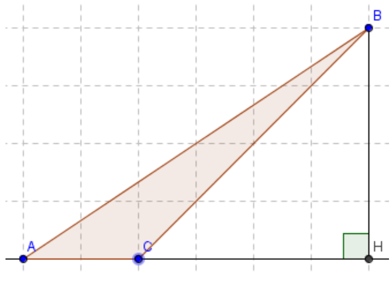
Dans BCH rectangle en H, le théorème de Pythagore nous donne $BC^2 = HC^2 + HB^2$
Donc ,$\Delta = AB^2 + AC^2 - BC^2 =, \Delta = AB^2 + AC^2 - (HC^2 + HB^2)$
Dans ABH rectangle en H, le théorème de Pythagore nous donne $AB^2 = AH^2 + HB^2$
Donc $\Delta = AH^2 + HB^2 + AC^2 - (HC^2 + HB^2) = AH^2 + HB^2 + AC^2 - HC^2 - HB^2 = HA^2 + AC^2 - HC^2$



Cas 1



Cas 2



Cas 3

2) Pour chacun des trois cas exprimez HC en fonction de AC et AH

Cas 1 : HC=AC-AH   Cas 2 : HC=AH+AC   Cas 3 : HC = AH - AC

3) Prouvez soigneusement que dans chacun des cas Δ vaut $2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

Vu l'expression attendue et le point de départ : $\Delta = HA^2 + AC^2 - HC^2$, on va devoir se débarasser de HA et HC et pour cela on doit trouver une expression en fonction de AB, AC et $\cos(\widehat{BAC})$.

Cas 1 : $\Delta = HA^2 + AC^2 - (\mathrm{AC} - \mathrm{AH})^2 = 2\,HA \times AC = 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ (formule trigonométrique niveau collège dans le triangle ABH rectangle en H.
Cas 2 : $\Delta = HA^2 + AC^2 - (\mathrm{AH} + \mathrm{AC})^2 = -2\,HA \times AC = -2AB \times AC \times \cos(\pi - \widehat{BAC})$
$= 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
Cas 3 : $\Delta = HA^2 + AC^2 - (\mathrm{AH} - \mathrm{AC})^2 = 2\,HA \times AC = 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

Partie II : les points de vue vectoriels et analytiques

On posera dans cette partie $\vec{u}\binom{x}{y} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'} = \overrightarrow{AC}$.

1) Montrer qu'avec les nouvelles notations on a : ,$\Delta = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2$

$||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2$
$= AB^2 + AC^2 - CB^2 = AB^2 + AC^2 - BC^2$

2) Après avoir récité la propriété de seconde qui donne la norme d'un vecteur en fonction de ses coordonnées, vous donnerez les conditions sous lesquelles cette formule est vraie.

Si on est dans un repère orthonormé on a : $\left\|\vec{u}\binom{x}{y}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

3) Exprimer $||\vec{u}||^2$, $||\vec{v}||^2$, et $||\vec{u} - \vec{v}||^2$ en fonction de x, x',y et y'.

$||\vec{u}||^2 = (x^2 + y^2)$, $||\vec{v}||^2 = x'^2 + y'^2$, et $||\vec{u} - \vec{v}||^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$

4) En déduire que $\Delta = 2(xx' + yy')$

$$\Delta = \left||\vec{u}|\right|^2 + \left||\vec{v}|\right|^2 - \left||\vec{u} - \vec{v}|\right|^2 = (x^2 + y^2) + \left(x'^2 + y'^2\right) - ((x - x')^2 + (y - y')^2)$$

$= (x^2 + y^2) + \left(x'^2 + y'^2\right) - \left(x^2 - 2xx' + y^2 + x'^2 - 2yy' + y'^2\right) = 2xx' + 2yy'$

Partie III : le produit scalaire

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ et valant $\frac{\Delta}{2}$.

Autrement dit $\quad \vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left||\vec{u}|\right|^2 + \left||\vec{v}|\right|^2 - \left||\vec{u} - \vec{v}|\right|^2\right) = \left||\vec{u}|\right|\left||\vec{v}|\right| \cos\left((\vec{u}, \vec{v})\right) = xx' + yy'$

En utilisant la (ou les) forme la plus appropriée répondre aux questions suivantes :

a. Prouver que $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' = x'x + y'y = \vec{v}.\vec{u}$

b. Qu'avec $\vec{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ on a : $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = (x' + x)x'' + (y' + y)y'' = (x'x'' + xx'') + (y'y'' + yy'') = (xx'' + yy'') + (x'x'' + y'y'') = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$

c. Qu'avec un réel k on a : $(k\vec{u}).\vec{v} = (k\vec{u})\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}.\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = kxx' + kyy' = k(xx' + yy') = k \times (\vec{u}.\vec{v})$

d. Trouver trois conditions suffisantes pour que $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

En utilisant : $\vec{u}.\vec{v} = \left||\vec{u}|\right|\left||\vec{v}|\right| \cos\left((\vec{u}, \vec{v})\right)$, voici trois conditions : $\vec{u} = \vec{0}, \vec{v} = \vec{0}$, $\cos\left((\vec{u}, \vec{v})\right) = 0$

e. Donner la mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ quand $\vec{u}\binom{3}{2}$ et $\vec{v}\binom{-6}{9}$

$\left||\vec{u}|\right| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, $\left||\vec{v}|\right| = \sqrt{(-6)^2 + 9^2} = \sqrt{117}$, et $xx' + yy' = -18 + 18 = 0$

Donc $\cos\left((\vec{u}, \vec{v})\right) = \frac{xx' + yy'}{||\vec{u}||||\vec{v}||} = 0$ donc $(\vec{u}, \vec{v}) = 0 + k\pi$

f. Donner la mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ quand $\vec{u}\binom{3}{2}$ et $\vec{v}\binom{5}{9}$

$\left||\vec{u}|\right| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, $\left||\vec{v}|\right| = \sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{106}$, et $xx' + yy' = 15 + 18 = 33$

Donc $\cos\left((\vec{u}, \vec{v})\right) = \frac{xx' + yy'}{||\vec{u}||||\vec{v}||} = \frac{33}{\sqrt{13}\sqrt{106}}$ donc $(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{33}{\sqrt{1378}}\right) + k2\pi \\ ou \\ -\cos^{-1}\left(\frac{33}{\sqrt{1378}}\right) + k2\pi \end{cases}$

Remarque :

Autant le déterminant est la voie royale pour tous les cas de parallélismes / colinéarité, le produit scalaire sera l'arme de choix pour gérer les cas d'orthogonalité.