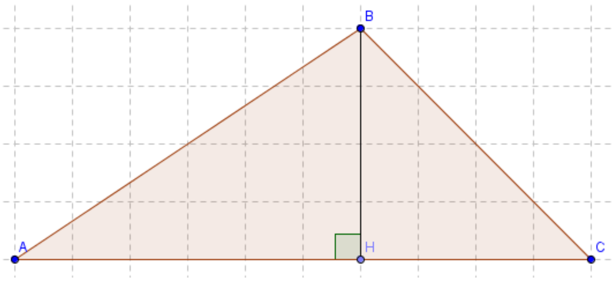
Devoir maison :
Introduction des produits scalaires

pour le 16/03/12

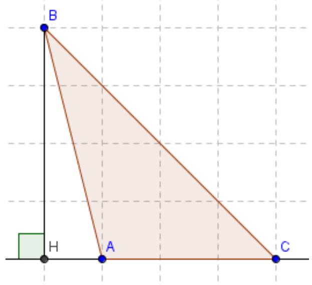
Soient A,B et C trois points du plan, on définit Δ par la relation suivante,Δ= $AB^2 + AC^2 - BC^2$

Partie I : reformulation en utilisant le cosinus

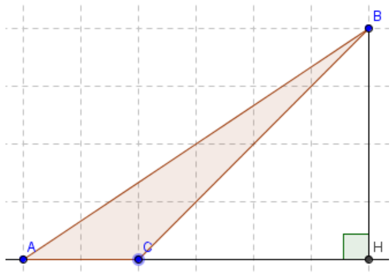
1) Etablir les relations $BC^2 = HC^2 + HB^2$ et $AB^2 = HA^2 + HB^2$. En déduire que Δ= $HA^2 + AC^2 - HC^2$



Cas 1



Cas 2



Cas 3

2) Pour chacun des trois cas exprimez HC en fonction de AC et AH
3) Prouvez soigneusement que dans chacun des cas Δ vaut $2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

Partie II : les points de vue vectoriels et analytiques

On posera dans cette partie $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}$.

1) Montrer qu'avec les nouvelles notations on a : ,Δ= $||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2$
2) Après avoir récité la propriété de seconde qui donne la norme d'un vecteur en fonction de ses coordonnées, vous donnerez les conditions sous lesquelles cette formule est vraie.
3) Exprimez $||\vec{u}||^2$, $||\vec{v}||^2$, et $||\vec{u} - \vec{v}||^2$ en fonction de x, x',y et y'.
4) En déduire que Δ= $2(xx' + yy')$

Partie III : le produit scalaire

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ et valant $\frac{\Delta}{2}$.

Autrement dit $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left||\vec{u}|\right|^2 + \left||\vec{v}|\right|^2 - \left||\vec{u} - \vec{v}|\right|^2\right) = \left||\vec{u}|\right|\left||\vec{v}|\right| \cos\left((\vec{u}, \vec{v})\right) = xx' + yy'$

En utilisant la (ou les) forme la plus appropriée répondre aux questions suivantes :

a. Prouver que $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
b. Qu'avec $\vec{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ on a : $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$
c. Qu'avec un réel k on a : $(k\vec{u}).\vec{v} = k \times (\vec{u}.\vec{v})$
d. Trouver trois conditions suffisantes pour que $\vec{u}.\vec{v} = 0$
e. Donner la mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ quand $\vec{u}\binom{3}{2}$ et $\vec{v}\binom{-6}{9}$
f. Donner la mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ quand $\vec{u}\binom{3}{2}$ et $\vec{v}\binom{5}{9}$

Remarque :

Autant le déterminant est la voie royale pour tous les cas de parallélismes / colinéarité, le produit scalaire sera l'arme de choix pour gérer les cas d'orthogonalité.

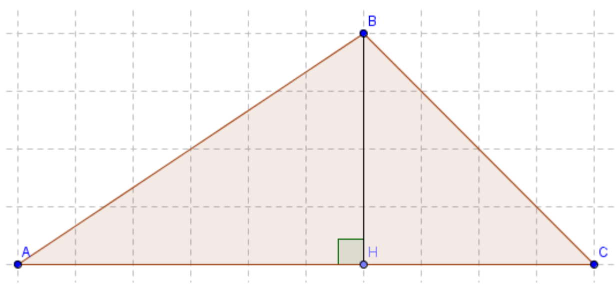
Devoir maison :
Introduction des produits scalaires

pour le 16/03/12

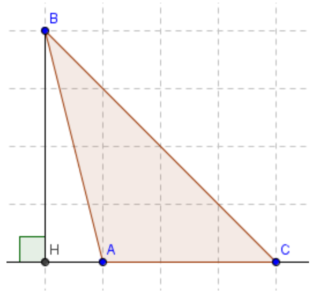
Soient A,B et C trois points du plan, on définit Δ par la relation suivante,Δ= $AB^2 + AC^2 - BC^2$

Partie I : reformulation en utilisant le cosinus

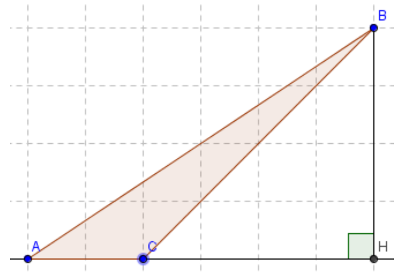
1) Etablir les relations $BC^2 = HC^2 + HB^2$ et $AB^2 = HA^2 + HB^2$. En déduire que Δ= $HA^2 + AC^2 - HC$



Cas 1



Cas 2



Cas 3

2) Pour chacun des trois cas exprimez HC en fonction de AC et AH
3) Prouvez soigneusement que dans chacun des cas Δ vaut $2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

Partie II : les points de vue vectoriels et analytiques

On posera dans cette partie $\vec{u}\binom{x}{y} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'} = \overrightarrow{AC}$.

1) Montrer qu'avec les nouvelles notations on a : ,Δ= $||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2$
2) Après avoir récité la propriété de seconde qui donne la norme d'un vecteur en fonction de ses coordonnées, vous donnerez les conditions sous lesquelles cette formule.
3) Exprimez $||\vec{u}||^2$, $||\vec{v}||^2$, et $||\vec{u} - \vec{v}||^2$ en fonction de x, x',y et y'.
4) En déduire que Δ= $2(xx' + yy')$

Partie III : le produit scalaire

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ et valant $\frac{\Delta}{2}$.

Autrement dit $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left||\vec{u}|\right|^2 + \left||\vec{v}|\right|^2 - \left||\vec{u} - \vec{v}|\right|^2\right) = \left||\vec{u}|\right|\left||\vec{v}|\right| \cos\left((\vec{u}, \vec{v})\right) = xx' + yy'$

En utilisant la (ou les) forme la plus appropriée répondre aux questions suivantes :

a. Prouver que $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
b. Qu'avec $\vec{w}\binom{x''}{y''}$ on a : $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$
c. Qu'avec un réel k on a : $(k\vec{u}).\vec{v} = k \times (\vec{u}.\vec{v})$
d. Trouver trois conditions suffisantes pour que $\vec{u}.\vec{v} = 0$
e. Donner la mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ quand $\vec{u}\binom{3}{2}$ et $\vec{v}\binom{-6}{9}$
f. Donner la mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ quand $\vec{u}\binom{3}{2}$ et $\vec{v}\binom{5}{9}$

Remarque :

Autant le déterminant est la voie royale pour tous les cas de parallélismes / colinéarité, le produit scalaire sera l'arme de choix pour gérer les cas d'orthogonalité.