Programme de révision :

Prérequis : Trigonométrie
Vous devez connaitre les cosinus et sinus des angles de référence
Connaitre les formules des arcs associés $-x$, $\pi - x$ et $\pi + x$.
Relation de chasles

Produits scalaires
Définition du produit scalaire
Formule du produit scalaire avec les coordonnées
Savoir déterminer un angle dont on connait le cosinus ou dont on connait le sinus
Projection orthogonale
Notion de travail
Al kashi

Pour être prêt il me faut être capable de refaire les deux premiers exercices du DM (le corrigé est sur le site) et les exercices de cette fiche.

Contrôle : produits scalaires

Feuille de sujet à coller sur la première page de votre copie
Pensez à régler votre calculatrice en degré

Nous travaillerons durant ce devoir dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, tous les arrondis seront donnés à une précision de à 10^{-2}.

Exercice 1 Soit $\vec{u}\binom{-5}{3}$ et $\vec{v}\binom{2}{7}$

1) Déterminer $\vec{u}.\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$
2) A l'aide de la définition du produit scalaire en déduire $\cos(\vec{u},\vec{v})$
3) en déduire une approximation à 10^{-2} de $(\vec{u},\vec{v})$ en degrés

Exercice 2

Soient ABCD un quadrilatère non croisé tel que AB = 5 , AC = 7 AD=6, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 30°$ et $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = 45°$

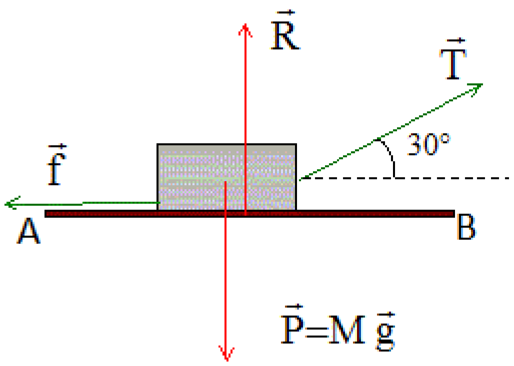
1) Faire une figure **à main levée** ou vous annoterez toutes les mesures de l'énoncé.
2) Déterminer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ (rappel : AB=$\|\overrightarrow{AB}\|$, AC= …)
3) Déterminer les aires des triangles ABC et ACD, en déduire l'aire du quadrilatère.
4) Déterminer les mesures du côtés [BC]

Exercice 3

Deux amis Abdel noté A et Beverly notés B, sont face à face distants de 30 mètres observent le même oiseau noté O qui vole dans le ciel. Abdel observe que d'où il est l'angle que fait l'oiseau par rapport à l'horizontale est de 30° et Beverly elle de son côté observe un angle de 40°.

1) Dessiner grossièrement une droite (AB) et un point O pour illustrer la situation. Annotez votre figure des mesures connues
2) Déterminer $\widehat{AOB}$, puis déterminer une approximation de OA et OB
3) En déduire l'aire de AOB
4) En utilisant cette aire et la mesure de [AB] déterminer h la hauteur de l'oiseau dans le ciel.

Exercice 4



Alors qu'on traine un solide du point A au point B il est soumis aux forces suivantes :

$\vec{T}$ la tension de la corde le tirant
$\vec{P}$ la force exercée par la force de gravité
$\vec{f}$ la force de frottement (horizontale)
$\vec{R}$ la réaction du sol

La force exercée par une force $\vec{F}$ lors d'un déplacement de A vers B est donnée en Joules grâce à la formule suivante $W_{\overrightarrow{AB}}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$

1) Expliquez pourquoi $W_{\overrightarrow{AB}}(\vec{R})$ et $W_{\overrightarrow{AB}}(\vec{P})$ les travail des forces $\vec{R}$ et $\vec{P}$ sont tous les deux nuls.
2) De quel signe sont $W_{\overrightarrow{AB}}(\vec{T})$ et $W_{\overrightarrow{AB}}(\vec{f})$
3) Sachant que $\|\vec{T}\| = 30\ N$, $\|\overrightarrow{AB}\| = 50m$ déterminer $W_{\overrightarrow{AB}}(\vec{T})$

Exercice 5

Soit $(1,8)$, $B(4,3)$, $C(5;2)$ et $D(8,2)$

1) Dessiner $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ainsi que $\overrightarrow{A'B'}$ le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AB}$ sur (CD) ces points dans $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$
2) A l'aide de la projection orthogonale déterminer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

Correction Contrôle : produits scalaires

Exercice 1 8min

Soit $\vec{u}\binom{-5}{3}$ et $\vec{v}\binom{2}{7}$

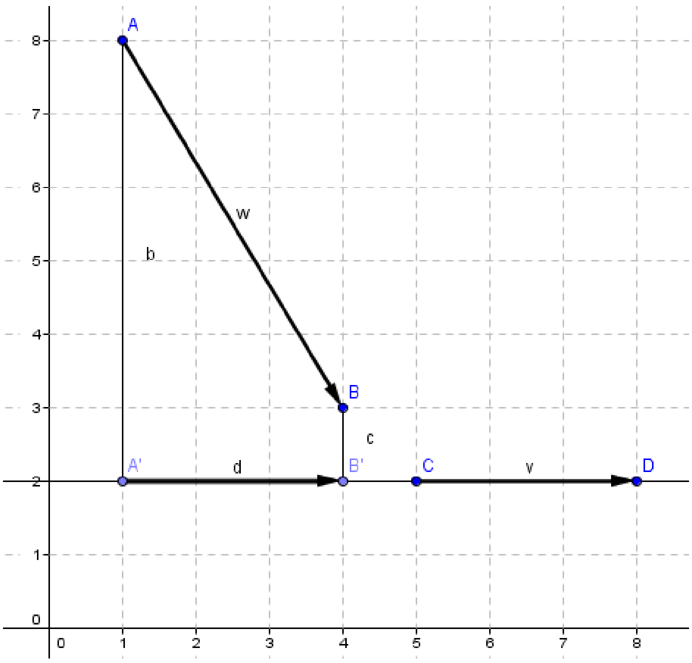
1) $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{34}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53}$, $\vec{u}.\vec{v} = (-5)2 + 3 \times 7 = -10 + 21 = 11$
2) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$ donc $\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \cos(\vec{u}, \vec{v})$ donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{11}{\sqrt{34}\sqrt{53}}$
3) $(\vec{u}, \vec{v}) = \cos^{-1}\left(\frac{11}{\sqrt{34}\sqrt{53}}\right) \approx 74{,}98$

Exercice 2 14min

1) Faire une figure **à main levée** ou vous annoterez toutes les mesures de l'énoncé.
2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 5 \times 7\cos(30) = \frac{35\sqrt{3}}{2} \approx 30{,}31$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = 7 \times 6\cos(45) = \frac{42\sqrt{2}}{2} \approx 29{,}70$
3) $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}AB \times AC \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{35}{2}\frac{1}{2} = \frac{35}{4} = 8{,}75$ et $\mathcal{A}_{ACD} = \frac{1}{2}AC \times AD \sin(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{42}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 10{,}5\sqrt{2} \approx 14{,}85$ et donc l'aire du quadrilatère est $8{,}75 + 10{,}5\sqrt{2} \approx 23{,}60$
4) En appliquant le théorème d'al Kashi dans ABC on a $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\frac{\pi}{6} = 25 + 49 - 70\frac{\sqrt{3}}{2}$ et donc $BC = \sqrt{74 - 35\sqrt{3}} \approx 3{,}65$

Exercice 5 10min

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{CD}$ car $\overrightarrow{A'B'}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AB}$ sur la droite (CD) or les deux vecteurs sont de même sens et de même direction donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB \times CD = 9$



Exercice 4 10min

1) les forces $\vec{R}$ et $\vec{P}$ sont orthogonales à $\overrightarrow{AB}$ donc ces vecteurs auront un produit scalaire nul avec $\overrightarrow{AB}$, ainsi elle n'aideront ni de géneront le déplacement.
2) $W_{\overrightarrow{AB}}(\vec{T}) > 0$ car $\vec{T}$ aide le déplacement et $W_{\overrightarrow{AB}}(\vec{f}) < 0$ car $\vec{f}$ gène le déplacement
3) $W_{\overrightarrow{AB}}(\vec{T}) = \vec{T}.\overrightarrow{AB} = \|\vec{T}\|\|\overrightarrow{AB}\| \cos 30 = 1299{,}04\, J$

Exercice 3 12 min

2) $\widehat{AOB} = 180 - 30 - 40 = 110°$ dans le triangle OAB utilisons la formule des sinus :
$\frac{OA}{\sin \widehat{ABO}} = \frac{OB}{\sin \widehat{OAB}} = \frac{AB}{\sin \widehat{AOB}} \Leftrightarrow \frac{OA}{\sin 40} = \frac{OB}{\sin 30} = \frac{30}{\sin 110}$ donc $OA = \frac{30\sin 40}{\sin 110} \approx 20{,}52$ et $OB = \frac{30\sin 30}{\sin 110} \approx 15{,}963$
3) $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}AB \times OB \sin \widehat{ABO} \approx 153{,}9\, m^2$
4) on sait que l'aire d'un triangle est aussi le demi produit de la mesure d'une base par la hauteur correspondante. Ainsi $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}AB \times h$ donc $h = \frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\frac{1}{2}AB} \approx 10{,}26m$

Exercices pour s'entrainer

Projeté orthogonal

Ex 18P201

Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ admet $\overrightarrow{AA}$ comme projeté sur la droite (AB) donc $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AA} = 0$ (car on a un des vecteurs qui est nul)

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ admet $\overrightarrow{AD}$ comme projeté sur la droite (AD) donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} = 1 \times 1 \times \cos\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD}\right) = 1 \times 1 = 1$

Si on pose I le milieu de [AB] alors le vecteur $\overrightarrow{AO}$ admet $\overrightarrow{AI}$ comme projeté sur la droite (AB) donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A0} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} = 1 \times \frac{1}{2} \times \cos\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A0}\right) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

Exercice 1

Soit A(4 ;1) B(1 ;4) et C(1 ;2) déterminer $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

Correction

$\overrightarrow{AB}\binom{1-4}{4-1} = \overrightarrow{AB}\binom{-3}{3}$ et $\overrightarrow{AC}\binom{1-4}{2-1} = \overrightarrow{AC}\binom{-3}{1}$ donc $\overrightarrow{AB}\binom{-3}{3}.\overrightarrow{AC}\binom{-3}{1} = 9 + 3 = 12$

de plus $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18}$ et $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ or comme $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\| \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ donc $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{12}{\sqrt{18}\sqrt{10}} \approx 0{,}894$

donc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{12}{\sqrt{18}\sqrt{10}}\right) \approx 26{,}57°$

Exercice 2

Soit ABC un triangle tel que : AC=25, CB=20 et $\widehat{ACB} = 108°$ déterminer AB.

Correction

Nous connaissons les mesures des côtés [AC] et [CB] et on peut facilement trouver la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$. Donc en utilisant le théorème d'Al Kashi dans ACB on peut écrire :

$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \times CBcos\left(\widehat{ACB}\right)$

Donc $AB^2 = 25^2 + 20^2 - 2 \times 25 \times 20 \cos(108) \approx 1334{,}017$ $\quad AB \approx 36{,}52cm$