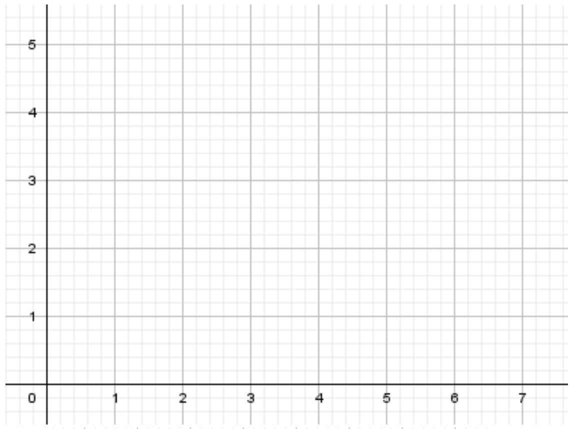
Nom & Prénom : ………………………………………………………………. www.dimension-k.com

Devoir surveillé : produits scalaires

Exercice 1

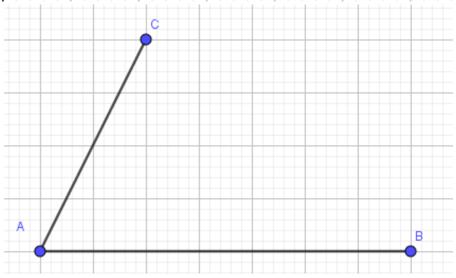
Soit A(1 ;4) B(4 ;5) et C(7,3)

1) Placer les points dans le repère ci-contre
2) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
3) En déduire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$
4) Déterminer $\|\overrightarrow{BA}\|$ et $\|\overrightarrow{BC}\|$
5) En déduire cos $\left((\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})\right)$ puis $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$

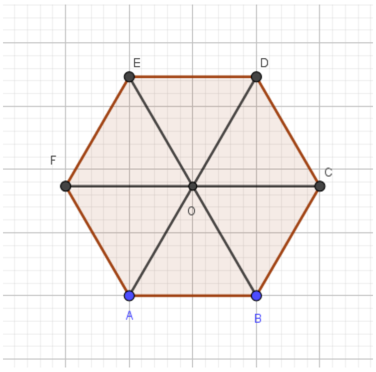


Exercice 2

1) A l'aide de projection orthogonale déterminer :
   a. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$
   b. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$
2) Déterminer CA^2
3) Déduire des deux questions précédentes $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$



Exercice 3



Soit ABCDEF un hexagone régulier de centre O et dont les six côtés mesurent 10.

Partie 1

1) Déterminer $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD}$, et en déduire : $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{CB}$
2) Déterminer $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{BA}$
3) En déduire $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{CA}$
4) On veut calculer $\overrightarrow{EO}.\overrightarrow{CA}$, on peut le faire en se plaçant dans le triangle équilatéral EAC et en déterminant la relation entre (EO) et (AC) ou en y allant morceau par morceau comme dans les trois premières questions.
5) En déduire $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{CA}$

Partie 2

Sans utiliser de cosinus ni d'angle déterminer de nouveau $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD}$

Exercice 4

Soit ABC le triangle tel que $\widehat{BAC} = 45°$, $AB \ = \ 5cm$ et $AC = 7cm$

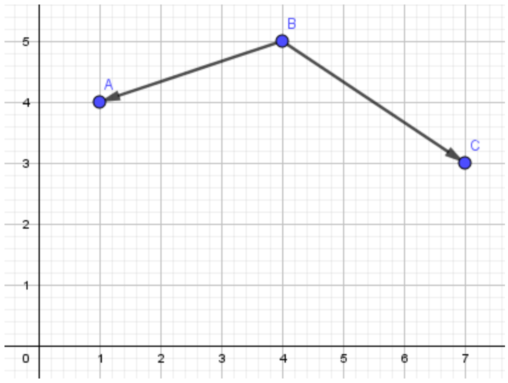
1) faire une figure à main levée dans l'espace vierge situé sous l'énoncé.
2) Donner une mesure exacte de BC puis arrondie à 10^{-2}
3) En déduire la mesure de $\widehat{ACB}$ arrondie à 10^{-2}.

Nom & Prénom : ………………………………………………………………. www.dimension-k.com

Correction

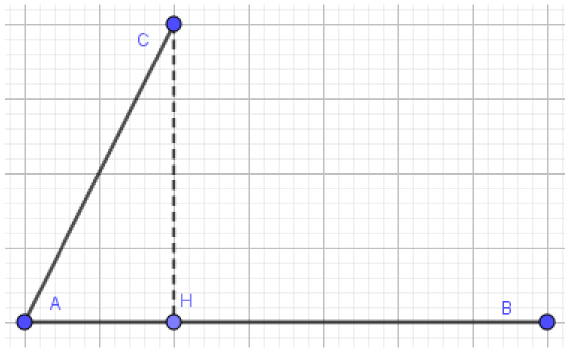
Exercice 1

Soit A(1 ;4) B(4 ;5) et C(7,3)



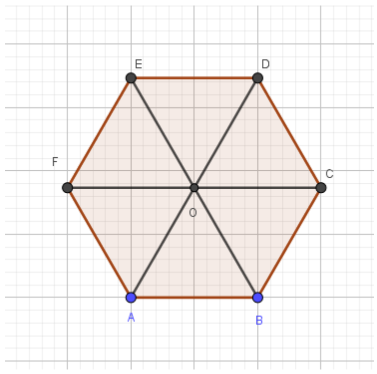
1) Placer les points dans le repère ci-contre
2) $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}1-4\\4-5\end{pmatrix} = \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}7-4\\3-5\end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.
3) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -3\times 3 + (-1)(-2) = -7$
4) $\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$ et
   $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{13}$
5) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\|\|\overrightarrow{BC}\|\cos\left(\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\right)$
   $\Leftrightarrow -7 = \sqrt{10}\sqrt{13}\cos\left(\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\right)$
   $\Leftrightarrow \frac{-7}{\sqrt{10}\sqrt{13}} = \cos\left(\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\right)$
   $\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-7}{\sqrt{10}\sqrt{13}}\right)$ Ainsi $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) \approx 127{,}87$

Exercice 2



1) Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). A a pour image lui-même par cette projection. Ainsi :
   a. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = AH\times AB = 2\times 7 = 14$
   b. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -AB\times HB = -7\times 5 = -35$
2) D'après Pythagore dans ACH rectangle en H on a : $CA^2 = AH^2 + HC^2 = 2^2 + 4^2 = 20$
3) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$
   $= CA^2 - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 20 - 14 = 6$

Exercice 3 Soit ABCDEF un hexagone régulier de centre O.



Partie 1

1) $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD} = \|\overrightarrow{OC}\|\|\overrightarrow{OD}\|\cos\left(\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD}\right)\right) = 10\times 10\cos(60°) = 50,$
2) Comme $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{OD}$ on aura : $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{CB} = -\left(\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD}\right) = -50$
3) $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC}.\left(-\overrightarrow{OC}\right) = -OC^2 = -100$
4) $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OC}.\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right) = \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{BA} = -50-100 = -150$
5) ABCO est un losange et donc $(OB)\perp(AC)$ de plus E, O et B sont alignés (l'angle $\widehat{ABC}$ fait trois fois 60°) donc (EO) est perpendiculaire à (AC) ainsi $\overrightarrow{EO}.\overrightarrow{CA} = 0$ de la même manière déterminer $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{CA} = \left(\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OC}\right).\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{EO}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{CA} = 0 + (-150) = -150$

Partie 2

On peut placer H le milieu de [OC], comme ODC est équilatéral ses médianes et ses hauteurs sont confondues donc ce point est le projeté orthogonal de D sur (OC) et ainsi $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD} = OC\times OH\times 1 = 50$

Exercice 4

Soit ABC le triangle tel que $\widehat{BAC} = 45°$, $AB = 5cm$ et $AC = 7cm$

1) faire une figure à main levée dans l'espace vierge situé sous l'énoncé.
2) Dans ABC le théorème d'Al Kashi nous donne :
   $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\times AC\times cos\left(\widehat{BAC}\right) = 5^2 + 7^2 - 2\times 5\times 7\times\frac{\sqrt{2}}{2}$
   $= 25 + 49 - 35\sqrt{2} = 74 - 35\sqrt{2}$. Ainsi $BC = \sqrt{74-35\sqrt{2}} \approx 4{,}95$
3) Dans ABC le théorème d'Al Kashi nous donne : $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC\times ACcos\left(\widehat{ACB}\right)$
   Ainsi $2BC\times ACcos\left(\widehat{ACB}\right) = BC^2 + AC^2 - AB^2$ et donc $cos\left(\widehat{ACB}\right) = \frac{BC^2+AC^2-AB^2}{2BC\times AC} \approx 0{,}6999$ et donc
   $\widehat{ACB} = \cos^{-1}\left(\frac{BC^2+AC^2-AB^2}{2BC\times AC}\right) \approx 45{,}58°$.