Produit scalaire

I. Présentation

Rappels : Définition / Propriété

La norme d'un vecteur correspond à sa longueur, ainsi la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ notée $\|\overrightarrow{AB}\|$ vaut AB.
Si k est un réel et $\vec{u}$ un vecteur on aura , $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.
Si l'on est dans un repère orthonormé, $\vec{u}\binom{x}{y}$ aura pour norme $\sqrt{x^2 + y^2}$

Exemple :
Soit A(2 ;3) et B(5 ;7) deux points d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Déterminer la mesure de [AB].
$\overrightarrow{AB}\binom{5-2}{7-3} = \overrightarrow{AB}\binom{3}{4}$ donc AB=$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Définition 1
Pour tout $\vec{u}$ et $\vec{v}$ distincts du vecteur nul : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v})$

Propriété 1
Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ et Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$

II. propriétés du produit scalaire dans un repère orthonormé

Tout ce qui suit se place dans un repère orthonormal.

Propriété 2
Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives : $\binom{x}{y}$ et $\binom{x\prime}{y\prime}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

Propriété 3
Pour tout vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et pour tout réel k on aura :
(1) $(\vec{u} + \vec{v})\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$ et (2) $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$

Démonstration
A faire par vous-même en utilisant la propriété juste avant

Propriété 4
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et non nuls alors $\vec{u}.\vec{v}$ vaut $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si ils sont de même sens et $-\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ sinon.

Propriété 5
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
Et $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

III. Orthogonalité

Définition 2
Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux signifie que :
Soit « $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ »
Soit (OA)⊥(OB) quand on pose trois points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$

Propriété 5
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Définition 3
D est une droite et M un point du plan.
Le projeté orthogonal du point M sur la droite D est le point d'intersection H de la droite et de la perpendiculaire à D passant par M

Remarque
Vous pouvez imaginer que l'on braque un projecteur sur une droite, éclairant des rayons perpendiculaires à cette dernière. Le projeté d'un point sera son ombre projetée sur la droite.

Propriété 6
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs distincts du vecteur nul tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
Alors $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$ où H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA)

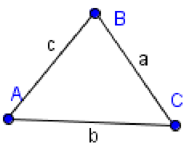
Conséquence

Remarque :
Si $(\vec{u};\vec{v}) \in [-\pi; 0]$ alors $(\vec{v}\,;\vec{u}) \in [0;\pi]$ et comme $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (propriété 1) on n'aura qu'à refaire la même démonstration en posant $\vec{u} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$

IV. Orthogonalité

Théorème d'Al-Kashi
Dans le triangle ABC,
avec les notations ci-contre on aura :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\hat{B})$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C})$$



Aires d'un triangle
Dans un triangle ABC l'aire vaut : $S = \frac{1}{2}bc\sin(\hat{A}) = \frac{1}{2}ab\sin(\hat{C}) = \frac{1}{2}ac\sin(\hat{B})$

Formule des sinus
Dans un triangle ABC, $\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})} = \frac{abc}{2S}$