Nom & Prénom : ………………………………………………………………………… www.dimension-k.com

Devoir surveillé de Mathématiques

Exercice 1

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) les suites définies respectivement par :

$u_n = \frac{5}{n} + 2n$

$\begin{cases} v_4 = 8 \\ v_{n+1} = 5v_n - 2 \end{cases}$

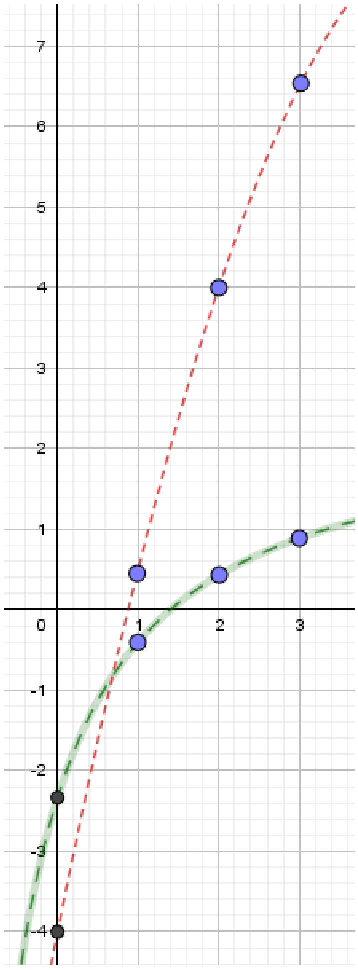
$\begin{cases} w_{10} = -2 \\ w_{n+1} = -3w_n + 5n \end{cases}$

1) Nommer le type de définition des deux premières suites.
2) A partir de quel rang sont définies chacune de ces suites
3) Donner les trois premiers termes calculables de chacune d'elles.

Exercice 2

Après avoir complété le programme (ci-dessous) déterminer une approximation à 10^{-3} des termes de rang 9, 15 et 100 de la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_8 = 100 \\ u_{n+1} = 1{,}05u_n + 1 \end{cases}$

```
u=……………………
n=int(input(''rang recherché''))
for i in range(…….,n+1) :
        u=
print(''terme cherché : '',u)
```



Exercice 3

Soit (c_n) la suite définie pour tout entier naturel n Faire le tableau de signe de l'expression $c_n = (4-n)(2n+12)$

1) Faire le tableau de signe de (c_n)
2) En déduire quand est ce que la suite est positive et quand est ce qu'elle est négative.

Exercice 4

Soient (a_n) et (b_n) les suites définies respectivement pour tout entier n par :

$$a_n = -0{,}5\, n^2 + 5\, n - 4$$

$$b_n = \frac{5n-7}{2n+3}$$

1) Sur la figure ci-contre placer à côté de chaque point le nom du terme correspondant.
2) Avec ces figures conjecturer les variations des deux suites.
3) Discuter des variations de (a_n). La conjecture est elle vérifiée ?
4) Discuter des variations de (b_n) (on prouvera que $b_{n+1} - b_n = \frac{29}{(2n+5)(2n+3)}$).

Exercice bonus

Déterminer le programme à taper pour calculer les termes de la suite (w_n) de l'exercice 1

Nom & Prénom : ……………………………………………………………………………… www.dimension-k.com

Correction **Devoir surveillé de Mathématiques**

Exercice 1

$u_n = \frac{5}{n} + 2n$ définie en fonction de n (de manière directe) à partir de $n = 1$

$\begin{cases} v_4 = 8 \\ v_{n+1} = 5v_n - 2 \end{cases}$ définie par récurrence à partir de $n = 4$

$\begin{cases} w_{10} = -2 \\ w_{n+1} = -3w_n + 5n \end{cases}$ définie de manière mixte à partir de $n = 11$

3) $u_1 = \frac{5}{1} + 2 \times 1 = 7$ $u_2 = \frac{5}{2} + 2 \times 2 = 6{,}5$ $u_3 = \frac{5}{3} + 2 \times 3 = \frac{23}{3}$

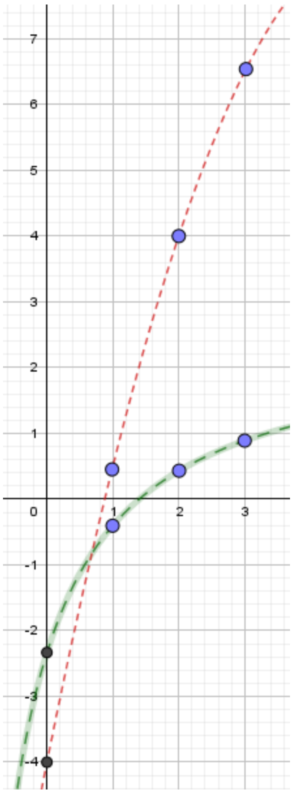
$v_5 = 5v_4 - 2 = 5 \times 8 - 2 = 38$ $v_6 = 5v_5 - 2 = 5 \times 38 - 2 = 188$ $v_7 = 5v_6 - 2 = 5 \times 188 - 2 = 938$

$w_{11} = -3w_{10} + 5 \times 10 = -3(-2) + 50 = 56$ $w_{12} = -3w_{11} + 5 \times 11 = -3 \times 56 + 55 = -113$ $w_{13} = -3w_{12} + 5 \times 12 = -3(-113) + 55 = 394$

Exercice 2

```
u=100
n=int(input(" rang recherché "))
for i in range(9,n+1):
    u=1.05*u+1
print("terme recherché :",u)
```

Avec le programme on obtient $u_9 = 106$ $u_{15} = 148{,}852$
$u_{100} = 10660{,}627$



Exercice 3

Soit (c_n) la suite définie pour tout entier naturel n Faire le tableau de signe de l'expression $c_n = (4 - n)(2n + 12)$

$4 - n$ est décroissante et s'annule en $4 - n = 0 \Leftrightarrow 4 = n$

$2n + 12$ est croissante et s'annule en $2n + 12 = 0 \Leftrightarrow 2n = -12 \Leftrightarrow n = -6$

n	$-\infty$		-6		4		$+\infty$
$4 - n$		+		+	0	-	
$2n + 12$		-	0	+		+	
c_n		-	0	+	0	-	

La suite est donc positive pour des n allant de 0 à 4 puis elle sera négative.

Exercice 4

Soient (a_n) et (b_n) les suites définies respectivement pour tout entier n par :

$a_n = -0{,}5\,n^2 + 5\,n - 4$ $b_n = \frac{5n-7}{2n+3}$

1) Sur la courbe verte nous avons les termes de la suite (b_n) et sur la courbe rouge ceux de (a_n).
2) On a l'impression qu'elles sont toutes deux croissantes.
3) .

$a_{n+1} - a_n = (-0{,}5(n+1)^2 + 5(n+1) - 4) - (-0{,}5n^2 + 5n - 4)$
$= (-0{,}5(n^2 + 2n + 1) + 5n + 5 - 4) + 0{,}5n^2 - 5n + 4$
$= (-0{,}5n^2 - n - 0{,}5 + 5n + 5 - 4) + 0{,}5n^2 - 5n + 4 = -n - 0{,}5 + 5 = -n + 4{,}5$ (expression décroissante)
Quand est ce que $-n + 4{,}5 = 0$? $4{,}5 = n$ donc à partir de $n = 5$ $a_{n+1} - a_n > 0$ donc (a_n) est décroissante à partir de $n = 5$

$b_{n+1}-b_n=\frac{5(n+1)-7}{2(n+1)+3}-\frac{5n-7}{2n+3}=\frac{5n+5-7}{2n+2+3}-\frac{5n-7}{2n+3}=\frac{5n-2}{2n+5}-\frac{5n-7}{2n+3}=\frac{(5n-2)}{(2n+5)}-\frac{(5n-7)}{(2n+3)}$

$=\frac{(5n-2)(2n+3)}{(2n+5)(2n+3)}-\frac{(5n-7)(2n+5)}{(2n+3)(2n+5)}=\frac{(10n^2+15n-4n-6)-(10n^2+25n-14n-35)}{(2n+5)(2n+3)}=\frac{10n^2+15n-4n-6-10n^2-25n+14n+35}{(2n+5)(2n+3)}$

$$=\frac{29}{(2n+5)(2n+3)}$$

n	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2n+3$		-		-	0	+	
$2n+5$		-	0	+		+	
b_n		+	0	$-$	0	+	

Ainsi pour tout n entier naturel on aura $b_{n+1}-b_n>0$ la suite est donc croissante.

Exercice bonus

Déterminer le programme à taper pour calculer les termes de la suite (w_n) de l'exercice 1

```python
w=-2
n=int(input(" rang recherché "))
for i in range(11,n+1):
    w=-3*w+5*(i-1)
print("terme recherché :",w)
```