Suites

Voici quelques suites à compléter :

1 ;5 ;9 ;13 ;17 ;21 ;25 ;…

9 ;-18 ;36 ;-72 ;144 ;-288

1 ;4 ;9 ;16 ;25 ;36 ;….

Lundi, mardi, mercredi,…

Triangle équilatéral, carré, pentagone régulier , ….

I. Présentation, généralités

Définition

Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.
Si une suite est représentée par la lettre u, on note u_n l'image de n, appelée aussi terme d'indice n.
La suite entière est représentée par(u_n).

a- Suite des valeurs d'une fonction.

Soit f une fonction définie sur $[0;+\infty[$. On peut définir une suite (u_n) par $u_n = f(n)$.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$.

On a alors : $u_0 = \frac{0+2}{0+1} = 2$ $\quad u_1 = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$ $\quad u_2 = \frac{2+2}{2+1} = \frac{4}{3}$, etc …

b- Suite définie par récurrence

On définit une suite par récurrence en indiquant son premier terme et une méthode de calcul d'un terme en fonction du précédent.

Exemple

Soit $g$la fonction définie par$g(x) = \frac{x}{2} - 1$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

On a alors :$u_1 = g(u_0) = \frac{2}{2} - 1 = 0$ $\quad u_2 = g(u_1) = \frac{0}{2} - 1 = -1$

$u_3 = g(u_2) = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$ etc…

Remarque

On ne peut calculer un terme que si on connaît le précédent, mais de proche en proche on peut calculer tous les termes en partant du premier.

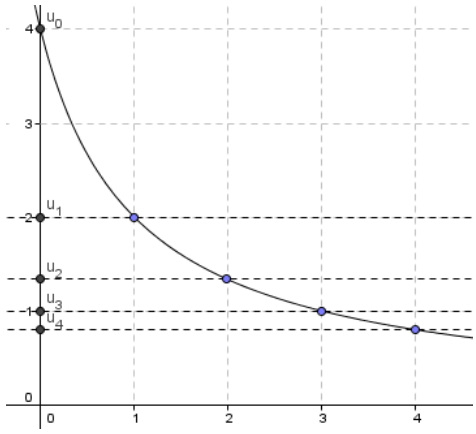
c- Représentation graphique de suites

Si la suite est définie comme **la suite des valeurs d'une fonctions**, on peut tracer la courbe représentative de la fonction puis, placer sur cette courbe les points d'abscisse 0, 1 , 2 etc correspondant respectivement à $u_0, u_1, u_2, \ldots$

Exemple :

soit la suite définie pour tout n entier par $u_n = \frac{4}{1+n}$, on tracera la courbe d'équation $f(x) = \frac{4}{1+x}$

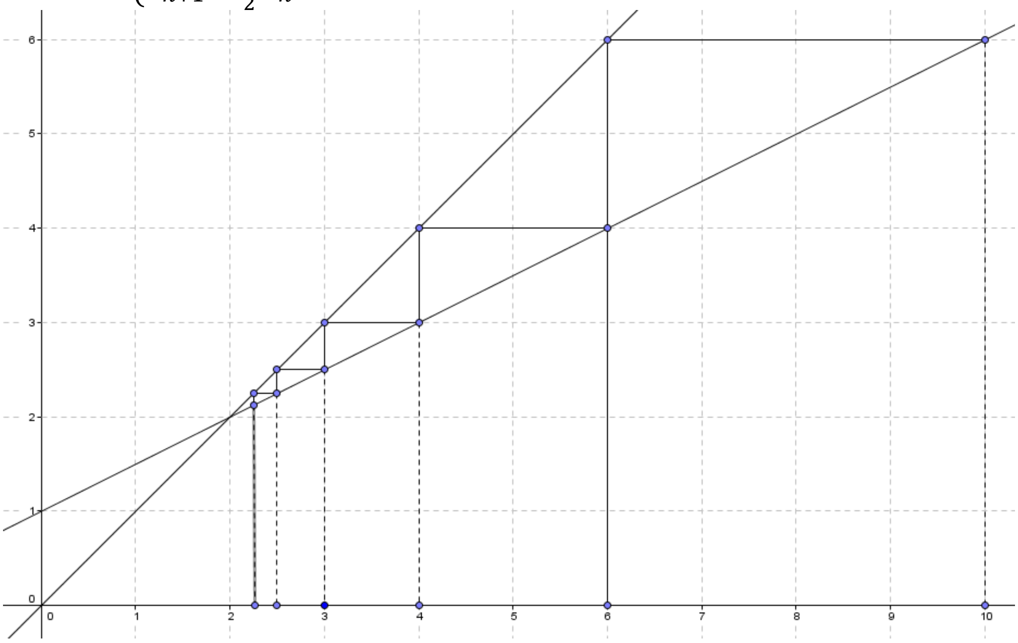
Je place mes points et je peux lire leur ordonnées qui me donne les valeurs des premiers termes de la suite.



Si la suite est définie par une relation de récurrence du type $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ alors on trace $\mathcal{C}_f$la courbe représentative de f ainsi que $y = x$. Les termes de la suite seront lisibles sur l'axe des abscisses.

On part de la valeur de u_0 sur l'axe des abscisses, on trace la verticale allant jusqu'à $\mathcal{C}_f$ puis l'horizontale jusqu'à $y = x$ puis la verticale jusqu'à $\mathcal{C}_f$ etc . Pour la lecture des termes de la suite il suffit de prolonger les traits verticaux jusqu'à l'axe des abscisse, le premier trait coupe l'axe en u_0, le suivant en u_1, etc

Exemple : $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$, ici la fonction f sera donc celle qui a tout x associe $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$



4- Suites croissantes et décroissantes

Une suite (u_n) est strictement croissante si pour tout entier naturel n on a $u_n < u_{n+1}$.
Une suite (u_n) est strictement décroissante si pour tout entier naturel n on a $u_n > u_{n+1}$.
Une suite (u_n) est constante si pour tout entier naturel n on a $u_n = u_{n+1}$.

Pour comparer u_{n+1} et u_n on peut étudier le signe de leur différence ou, si tous les u_n sont strictement positifs, comparer leur quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Exemple 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2 + n - 3$.
$u_{n+1} - u_n = \left((n+1)^2 + (n+1) - 3\right) - \left(n^2 + n - 3\right)$
$= n^2 + 2n + 1 + n + 1 - 3 - n^2 - n + 3$ donc $u_{n+1} - u_n = 2n + 2 > 0$.
On en déduit que $u_n < u_{n+1}$, donc que (u_n) est strictement croissante.

Exemple 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 7\frac{2^n}{3^{2n+1}}$. Tous les termes de cette suite sont positifs.
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{7\frac{2^{n+1}}{3^{2(n+1)+1}}}{7\frac{2^n}{3^n}} = \frac{2^{n+1}}{3^{2n+3}} \times \frac{3^{2n+1}}{2^n} = \frac{2}{3^2}\ or \frac{2}{9} < 1$ on en déduit que $u_{n+1} < u_n$, la suite (u_n) est donc strictement décroissante.

II. Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre r est appelé raison de la suite arithmétique.

1- Sens de variation

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On a $u_{n+1} - u_n = r$.
On en déduit que :
- si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante. - si $r < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
- si $r = 0$, la suite (u_n) est constante.

2- Expression de u_n en fonction de n

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n = u_0 + n \times r}$
Réciproquement, si f est la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$, la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = b$ et de raison a.

III. Suites géométriques

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n $\boldsymbol{u_{n+1} = q\, u_n}$.
Le nombre q est appelé raison de la suite géométrique.

1- Sens de variation

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$
Si u_0 et q sont strictement positifs, on en déduit que :
- si $q > 1$, la suite (u_n) est strictement croissante.
- si $q < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
- si $q = 1$, la suite (u_n) est constante.

2- Expression de u_n en fonction de n

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n = u_0\, q^n}$.