GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

I. Définition et représentation graphique

1) Définition d'une suite numérique

Exemple d'introduction :
On considère une liste de nombres formée par tous les nombres impairs rangés dans l'ordre croissant : 1, 3, 5, 7, …
On note (u_n) l'ensemble des "éléments" de cette suite de nombres tel que :
$u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7$, …
On a ainsi défini une suite numérique.
On peut lui associer une fonction définie sur ℕ par u : $\begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \to u(n) = u_n \end{array}$

Définitions : Une suite numérique (u_n) est une liste ordonnée de nombres réels telle qu'à tout entier n on associe un nombre réel noté u_n.
u_n est appelé le terme de rang n de cette suite (ou d'indice n).

2) Générer une suite numérique par une formule explicite

Exemples :
- Pour tout n de ℕ, on donne : $u_n = 2n$ qui définit la suite des nombres pairs.
Les premiers termes de cette suite sont donc :
$u_0 = 2 \times 0 = 0$, $u_1 = 2 \times 1 = 2$, $u_2 = 2 \times 2 = 4$, $u_3 = 2 \times 3 = 6$.

- Pour tout n de ℕ, on donne : $v_n = 3n^2 - 1$.
Les premiers termes de cette suite sont donc :
$v_0 = 3 \times 0^2 - 1 = -1$, $v_1 = 3 \times 1^2 - 1 = 2$, $v_2 = 3 \times 2^2 - 1 = 11$, $v_3 = 3 \times 3^2 - 1 = 26$.

Lorsqu'on génère une suite par une formule explicite, chaque terme de la suite est exprimé en fonction de n et indépendamment des termes précédents.

3) Générer une suite numérique par une relation de récurrence

Exemples :
- On définit la suite (u_n) par :
$u_0 = 5$ et chaque terme de la suite est le triple de son précédent.
Les premiers termes de cette suite sont donc :
$u_0 = 5$, $u_1 = 3 \times u_0 = 3 \times 5 = 15$, $u_2 = 3 \times u_1 = 3 \times 15 = 45$.

- On définit la suite (v_n) par :
$v_0 = 3$ et pour tout n de ℕ, $v_{n+1} = 4v_n - 6$
Les premiers termes de cette suite sont donc :
$v_0 = 3$, $v_1 = 4v_0 - 6 = 4 \times 3 - 6 = 6$, $v_2 = 4v_1 - 6 = 4 \times 6 - 6 = 18$,
$v_3 = 4v_2 - 6 = 4 \times 18 - 6 = 66$.

Contrairement à une suite définie par une formule explicite, il n'est pas possible, dans l'état, de calculer par exemple v_{13} sans connaître v_{12}.

Cependant il est possible d'écrire un algorithme sur une calculatrice programmable.

Sur TI :

```
PROGRAM : SUITE
: Input "N=?",N
: 3→u
: For(I,1,N)
: 4*u–6→u
: End
: Disp u
```

```
PrgmSUITE
N=?13
        67108866
        Fait
```

Sur Casio :

```
======SUITE======
?→N↵
3→u↵
For 1→I To N↵
4*u–6→u↵
Next↵
u◢
```

```
?
13
  67108866
  -Disp-
```

- On définit la suite (w_n) par pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $w_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$
Les premiers termes de cette suite sont donc :
$w_1 = 1, w_2 = w_1 + 2 = 1 + 2 = 3$, $w_3 = w_2 + 3 = 3 + 3 = 6$ $w_4 = w_3 + 4 = 6 + 4 = 10$

Lorsqu'on génère une suite par une relation de récurrence, chaque terme de la suite s'obtient à partir d'un ou plusieurs des termes précédents.

A noter : Le mot *récurrence* vient du latin *recurrere* qui signifie "revenir en arrière".

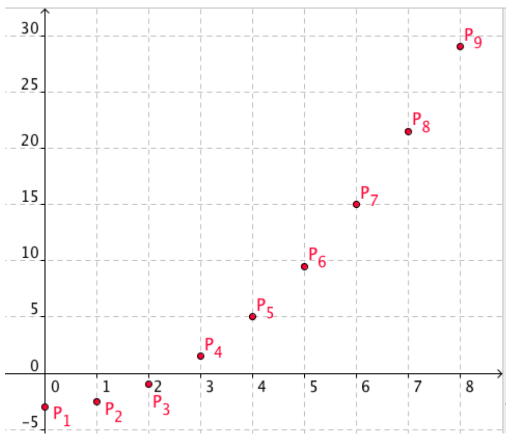
4) Représentation graphique d'une suite

Dans un repère du plan, on représente une suite par un nuage de points de coordonnées $(n;u_n)$.

Exemple :
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne : $u_n = \frac{n^2}{2} - 3$.
On construit le tableau de valeurs avec les premiers termes de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	-3	-2,5	-1	1,5	5	9,5	15	21,5	29

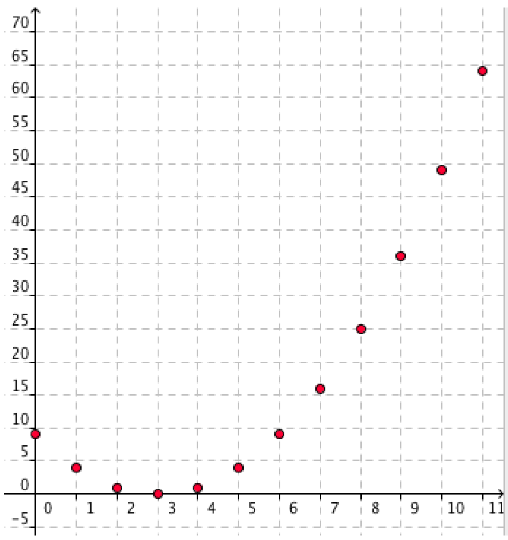
Il est aisé d'obtenir un nuage de points à l'aide d'un logiciel.



	A	B
1	n	u_n
2	0	-3
3	1	-2.5
4	2	-1
5	3	1.5
6	4	5
7	5	9.5
8	6	15
9	7	21.5
10	8	29
11		
12		
13		
14		

II. Sens de variation d'une suite numérique

Exemple :
On a représenté ci-dessous le nuage de points des premiers termes d'une suite (u_n) :



	A	B
1	n	u_n
2	0	9
3	1	4
4	2	1
5	3	0
6	4	1
7	5	4
8	6	9
9	7	16
10	8	25
11	9	36
12	10	49
13	11	64
14		
15		
16		

On peut conjecturer que cette suite est croissante pour $n \geq 3$.

<u>Définitions :</u> Soit un entier p et une suite numérique (u_n).
- La suite (u_n) est <u>croissante à partir du rang p</u> signifie que pour $n \geq p$, on a $u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite (u_n) est <u>décroissante à partir du rang p</u> signifie que pour $n \geq p$, on a $u_{n+1} \leq u_n$.

<u>Méthode :</u> Etudier les variations d'une suite

1) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne la suite (u_n) définie par : $u_n = n^2 - 4n + 4$.
Démontrer que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

On commence par calculer la différence $u_{n+1} - u_n$:
$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 4(n+1) + 4 - n^2 + 4n - 4$
$= n^2 + 2n + 1 - 4n - 4 + 4 - n^2 + 4n - 4 = 2n - 3$

On étudie ensuite le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour $2n - 3 \geq 0$ donc pour $n \geq 1{,}5$.
Ainsi pour $n \geq 2$ (n est entier), on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
On en déduit qu'à partir du rang 2, la suite (u_n) est croissante.

2) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on donne la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$.
Démontrer que la suite (v_n) est décroissante.

On commence par calculer le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2}$ /
Or $0 < n < n+2$, on a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$ et donc $v_{n+1} - v_n < 0$ (car $v_n > 0$).
On en déduit que (v_n) est décroissante.

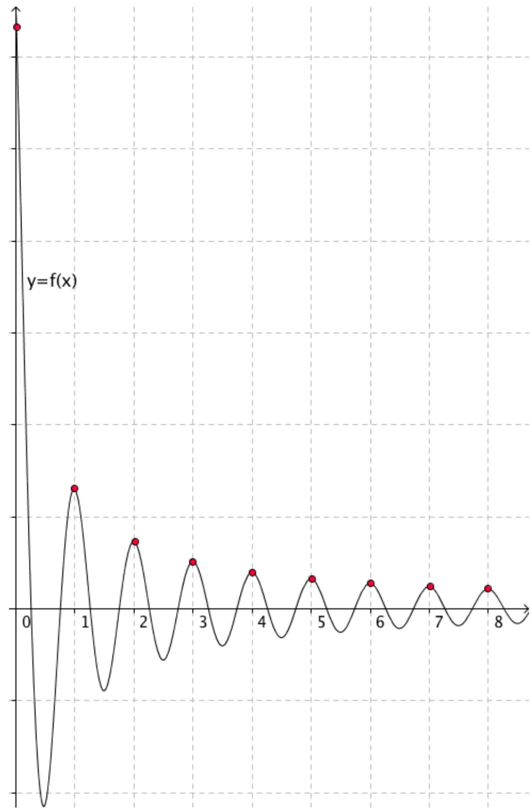
<u>Propriété :</u> Soit une fonction f définie sur $\left[0;+\infty\right[$ et une suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$. Soit un entier p.
- Si f est croissante sur l'intervalle $\left[p;+\infty\right[$, alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang p.
- Si f est décroissante sur l'intervalle $\left[p;+\infty\right[$, alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang p.

<u>Démonstration :</u>
- f est croissante sur $\left[p;+\infty\right[$ donc par définition d'une fonction croissante, on a pour tout entier $n \geq p$: comme $n+1 > n$, $f(n+1) \geq f(n)$ et donc $u_{n+1} \geq u_n$.
- Démonstration analogue pour la décroissance.

<u>Méthode :</u> Etudier les variations d'une suite à l'aide de la fonction associée

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{n+1}$.
Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
On considère la fonction associée f définie sur $\left[0;+\infty\right[$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Ainsi $u_n = f(n)$.
Etudions les variations de f définie sur $[0;+\infty[$:
$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$
Pour tout x de $[0;+\infty[$, on a : $f'(x) < 0$.
Donc f est décroissante sur $\left[0;+\infty\right[$. On en déduit que (u_n) est décroissante.



<u>Remarque :</u>
La réciproque de la propriété énoncée plus haut est fausse.
La représentation suivante montre une suite décroissante alors que la fonction f n'est pas monotone.

Utilisation de la calculatrice et de Python pour traiter les suites.

Les calculatrices possèdent une fonction intégrée pour gérer les suites, si vous voulez l'utiliser référez-vous à la documentation en ligne pour votre machine. Là on va s'intéresser à des approches alternatives.

Les deux définitions de suite les plus fréquentes sont la définition en fonction de n et par récurrence.
En fonction de n, par exemple :
$u_n = 5n^2 - 3n - 9$ on utilisera $Y_1 = 5X^2 - 3X - 9$ on utilise «déf table » avec DébTbl=0 et Pas=1
Indpnt :Auto Calculs :Auto

Par récurrence par exemple :
$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 7\,u_n - 3 \end{cases}$ on utilisera la commande Rep de la calculatrice qui :

1 ↲	1
7Rep-3 ↲	4
↲	25
↲	172

Programmation :
Vu qu'on va répéter encore et encore la même séquence de calcul, il peut être intéressant d'utiliser des boucles. La commande est :

for(compteur,début,fin)
action 1
action 2
End

Exemple :
Petit programme permettant d'obtenir le Nème terme
De la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 7\,u_n - 3 + n \end{cases}$

Disp « rang desiré »	ça permer d'y voir plus clair
Prompt N	on récupère le rang attendu
1→U	U reçoit sa première valeur
For(I,1,N)	I va prendre toutes les valeurs entre 1 et N
7U-3+(I-1) →U	détermine la valeur suivante de U (il s'agit de $U_I = U_{I-1} - 3 + (I-1)$)
End	clos la boucle
Disp U	Affiche la valeur du terme attendu

Avec cette approche U reçoit successivement toutes les valeurs de la suite (U_n) jusqu'à celle qui est attendu. Les valeurs sont calculées, stockées puis écrasées.