www.dimension-k.com

Savoirs faires attendus :

Suites arithmétiques et géométriques

Savoir traduire une augmentation ou une diminution en termes de produit par un nombre
Si l'augmentation est de $t\%$ *alors on fera une multiplication par* $\left(1+\frac{t}{100}\right)$
Être capable de passer d'une définition par récurrence à une expression en fonction de n
et savoir traduire tout ça en terme de nature, de premier terme et de raison.
Savoir prévoir les variations d'une suite dont on connait premier terme et raison
Savoir déterminer la raison d'une suite dont on connait plusieurs termes.
Savoir écrire un programme permettant de calculer n'importe quel terme de n'importe quelle suite
Savoir écrire un programme disant à partir de quel rang une suite dépasse un seuil donné

Fonctions polynômes du second degré

Forme classique $f(x) = ax^2 + bx + c$
Savoir lire sur une courbe la valeur de c
Savoir interpréter la courbe pour déterminer la valeur de a
Savoir prévoir l'allure générale d'une fonction polynôme du second degré.

Forme factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
Savoir déduire le coefficient de l'écriture classique à partir de la version factorisée
Savoir déduire les valeurs d'annulation (appelées racines) d'un trinôme.
Savoir déterminer l'abscisse où l'axe de symétrie de la courbe vient taper l'axe des abscisses
Savoir déterminer les coordonnées du sommet d'une fonctions proposée sous forme factorisée.
Savoir déterminer une racine évidente
(On teste généralement la fonction en 0, puis 1, puis -1, puis 2 puis -2), la racine évidente est la valeur provoquant l'annulation de la fonction)
Savoir déduire une racine quand on connait la première en utilisant : $\frac{c}{a} = x_1 x_2$

Contrôle Suites et polynômes du second degré (sujet 0)

Exercice 0

Soit $(u_n), (v_n)$ *et* (w_n) trois suites telles que : $u_2 = 25, u_3 = -75$ et $u_4 = 225$.
$v_7 = 4$, $v_8 = 7$ et $v_9 = 11$, $w_0 = 53$, $w_1 = 106$ et $w_2 = 159$
Dire si à votre avis les suites sont géométriques, arithmétiques ou aucun des deux (argumenter)

Exercice 1 Compléter le tableau ci-dessous

Définition par récurrence	Expression en fonction de n	Nature, premier terme, raison	Variations (à justifier)
$\begin{cases} a_0 = 7 \\ a_{n+1} = 8 + a_n \end{cases}$			
	$b_n = 3 \times 2^n$		
		Suite géométrique de premier terme $c_4 = 11$ et de raison $q = 0{,}8$	
		Suite arithmétique de premier terme $d_3 = 24$ et de raison$r = -5$	

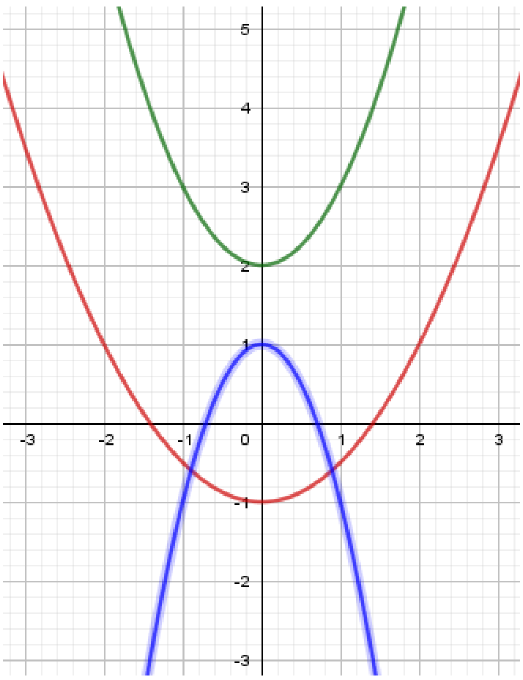
Exercice 2

Soit (j_n) une suite arithmétique telle que $j_4 = 156$ et $j_7 = 189$ déterminer la raison de la suite et calculer j_{12}

Exercice 3

On place une culture contenant 1024 bactéries dans un milieu nutritif placé lui-même dans une étuve.
On estime que toutes les heures le nombre de bactérie augmente de 25%.
On pose u_n le nombre de bactéries présentes dans la culture n heures après le début de l'expérience.

1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
2) Donner une expression en fonction de n de u_n
3) Calculer u_1, u_2 et u_3
4) On veut savoir quand est ce que le nombre de bactéries dépassera un million.
    a. Proposer un algorithme pour déterminer ce moment
    b. Traduire cet algorithme en programme python
    c. Utiliser ce programme pour conclure.



Exercice 4

1) Repasser en fluo la courbe de la fonction $g(x) = 0{,}5x^2 - 1$
2) Repasser au crayon gris la courbe de la fonction h dont l'expression commence ainsi $h(x) = -2x^2 + \ ...$
3) Déterminer l'équations de f la fonction restante.

Exercice 5

Soit la fonction f dont l'expression factorisée est :
$f(x) = -3(x-7)(x+1)$

1) La courbe de la fonction sourit-elle ? pourquoi ?
2) Quelles sont les valeurs d'annulation de la fonction
3) Quel est l'abscisse de l'axe de symétrie
4) Quel sont les coordonnées du sommet ?

Exercice 6

Soit f la fonction qui a tout réel associe le nombre $f(x) = 2x^2 - 3x - 14$
On veut déterminer sa forme factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

1) Déterminer la valeur de a
2) Déterminer une racine évidente
3) En déduire la valeur de x_2 et conclure

Correction

Exercice 0

Soit $(u_n), (v_n)\ et\ (w_n)$ trois suites telles que : $u_2 = 25, u_3 = -75$ et $u_4 = 225$.
$v_7 = 4, v_8 = 7$ et $v_9 = 11$, $w_0 = 53, w_1 = 106$ et $w_2 = 159$

$\frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = -3$ la suite u semble donc être géométrique de raison -3

$\frac{v_8}{v_7} \neq \frac{v_9}{v_8}$ donc v n'est pas géométrique, de plus $v_8 - v_7 \neq v_9 - v_8$ donc la suite n'est pas arithmétique non plus

$w_1 - w_0 = w_2 - w_1 = 53$ donc w semble être arithmétique de raison 53

Exercice 1 Compléter le tableau ci-dessous

Définition par récurrence	Expression en fonction de n	Nature, premier terme, raison	Variations
$\begin{cases} a_0 = 7 \\ a_{n+1} = 8 + a_n \end{cases}$	$a_n = 7 + 8n$	Arithmétique de premier terme $a_0 = 7$ et de raison $r = 8$	Croissante car $r = 8 > 0$
$\begin{cases} b_0 = 3 \\ b_{n+1} = 2b_n \end{cases}$	$b_n = 3 \times 2^n$	Suite géométrique de premier terme $b_0 = 3$ et de raison $q = 2$	Croissante car $q = 2 > 1$
$\begin{cases} c_4 = 11 \\ c_{n+1} = 0{,}8c_n \end{cases}$	$c_n = 11 \times 0{,}8^{n-4}$	Suite géométrique de premier terme $c_4 = 11$ et de raison $q = 0{,}8$	Décroissante car $q = 0{,}8$ donc $0 \leq q < 1$
$\begin{cases} d_3 = 24 \\ d_{n+1} = -5 + d_n \end{cases}$	$d_n = 24 + (-5)(n - 3)$	Suite arithmétique de premier terme $d_3 = 24$ et de raison$r = -5$	Décroissante car $r = -5 < 0$

Exercice 2

Soit (j_n) une suite arithmétique telle que $j_4 = 156$ et $j_7 = 189$ déterminer la raison de la suite et calculer j_{12}
$j_7 - j_4 = (7 - 4)r = 3r$ de plus $j_7 - j_4 = 189 - 156 = 33$ ainsi $3r = 33$ et donc $r = 11$
Ainsi $j_{12} = j_4 + (12 - 4)r = 156 + 8 \times 11 = 244$
Version ralentie

si elle est arithmétique alors $j_4 = j_0 + 4r$ et $j_7 = j_0 + 7r$
et donc $j_7 - j_4 = (j_0 + 7r) - (j_0 + 4r) = j_0 + 7r - j_0 - 4r = 3r$
ou encore
pour passer de j_4 à j_7 on rajoute trois fois la raison
c'est pourquoi quand on fait $j_7 - j_4$ on obtient $3r$
quand on fait $j_7 - j_4$ avec les valeurs de l'énoncé on obtient : $j_7 - j_4 = 189 - 156 = 33$
ainsi $3r = 33$ et donc $r = 11$

Exercice 3

On place une culture contenant 1024 bactéries dans un milieu nutritif placé lui-même dans une étuve.
On estime que toutes les heures le nombre de bactérie augmente de 25%.
On pose u_n le nombre de bactéries présentes dans la culture n heures après le début de l'expérience.

1) $u_{n+1} = \left(1 + \frac{25}{100}\right)u_n = 1{,}25u_n$
2) $u_n = 1024 \times 1{,}25^n$
3) $u_1 = 1024 \times 1{,}25 = 1280$,
   $u_2 = 1280 \times 1{,}25 = 1600$ et $u_3 = 2000$
4) U prend la valeur 1024
   N prend pour valeur 0
   Tant que U≤ 1 000 000 :
      U prend la valeur U×1,25
      N prend la valeur N+1
   Afficher N $n = 31$

```
U=20000
N=0
while U<=1000000 :
    U=U*1,25
    N=N+1
print(« rang où U dépasse 1 million : »,N)
```

Exercice 4

1) $g(x) = 0{,}5x^2 - 1$ correspond à la courbe rouge car c'est la seule à couper l'axe des ordonnées en $c = -1$

2) la fonction h dont l'expression commence ainsi $h(x) = -2x^2 + \ldots$ donc elle correspond à la courbe bleue c'est la seul qui est triste ($a < 0$)
3) En vert la courbe coupe l'axe des ordonnées en 2 donc $f(x) = ax^2 + 2$ et donc $f(1) = a1^2 + 2 = a + 2$ de plus $f(1) = 3$ donc $a + 2 = 3$ et donc $a = 3 - 2$ ainsi $a = 1$ et $f(x) = 1x^2 + 2$

Exercice 5

Soit la fonction f dont l'expression factorisée est :
$f(x) = -3(x - 7)(x + 1)$

1) La courbe ne sourit pas car $a < 0$
2) $f(x) = -3(x - 7)(x + 1) = -3(x - 7)(x - (-1))$les valeurs d'annulation de la fonction sont 7 et -1
3) $p = \frac{7+(-1)}{2} = 3$
4) $f(3) = -3(3 - 7)(3 + 1) = -3 \times 4 \times 4 = -48$ ainsi le sommet S aura pour coordonnées $S(3; -48)$

Exercice 6

Soit f la fonction qui a tout réel associe le nombre $f(x) = 2x^2 - 3x - 14$
On veut déterminer sa forme factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
C'est un exercice typique.
On veut passer d'une forme développée de notre fonction polynôme du second degré à une forme factorisée.
Il y a trois éléments à déterminer.
Le premier a est le plus simple à trouver car c'est le même a pour les deux formes

1) $f(x) = 2x^2 - 3x - 14$ donc dans cette forme $a = 2$, $b = -3$ et $c = -14$. Dans la forme factorisée la valeur de a sera donc aussi 2.

Le second élément est une racine, autrement dit une valeur d'annulation, et là tout est possible, rien n'est particulièrement prévisible. Il faudrait tester toutes les valeurs et croiser les doigts pour qu'on finisse par tomber sur les bonnes racines avant d'avoir des cheveux gris. Vu le temps limité du contrôle on vous guide. L'énoncé est fait spécialement pour qu'une des deux racines soit évidente, c'est-à-dire qu'elle ait pour valeur -2, -1, 0, 1 ou 2.
Il nous faudra souvent tester plusieurs valeurs avant de trouver la bonne. Le plus simple est d'utiliser le tableau de la calculatrice. Sur la copie on ne marque que le calcul qui aboutit

2) $f(-2) = 2(-2)^2 - 3(-2) - 14 = 8 + 6 - 14 = 0$ ainsi $x_1 = -2$ est une racine évidente .

Une fois que l'on a trouvé une racine, déterminer la seconde est assez simple, on utilise une formule apprise par cœur : $\frac{c}{a} = x_1 x_2$. On y remplace c et a qui sont donnés par l'écriture développée du polynôme et on remplace x_1 par la racine évidente qui a été déterminée dans la question précédente.

3) On sait que $\frac{c}{a} = x_1 x_2$ donc $\frac{-14}{2} = -2x_2$ et donc $\frac{-7}{-2} = x_2$ et donc $x_2 = 3{,}5$

Une fois qu'on connaît a, x_1 et x_2 on peut donner l'écriture factorisée utilisant ces valeurs.

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 2\big(x - (-2)\big)(x - 3{,}5) = 2(x + 2)(x - 3{,}5)$$