Equation Trigonométrique :
Solidification et Approfondissement

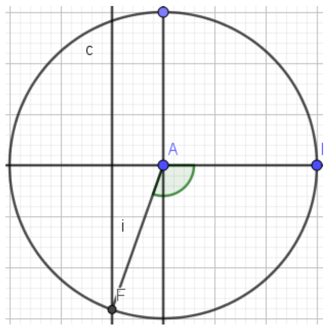
Pour préparer le 48P184
Si on vous propose la consigne :
Regarder si les couples de mesures suivantes correspondent au même angle :

a) $\frac{87\pi}{4}$ et $-\frac{17\pi}{4}$
b) $\frac{23\pi}{5}$ et $\frac{34\pi}{5}$

On procédera de la manière suivante :
On sait que l'on passe d'une mesure à une autre d'un même angle en rajoutant un certain nombre de tours, donc il me suffit d'étudier la différence entre les deux mesures, si elle est un multiple de 2π alors les deux mesures correspondent au même angle, sinon elles sont associées à des angles différents.

a) $\frac{87\pi}{4}-\left(-\frac{17\pi}{4}\right)=\frac{87\pi}{4}+\frac{17\pi}{4}=\frac{104\pi}{4}=26\pi=13\times 2\pi$ les deux mesures proposées sont bien associées au même angle.
b) $\frac{34\pi}{5}-\frac{23\pi}{5}=\frac{11\pi}{5}=\frac{11}{5}\pi$ la différence n'étant pas un multiple de 2π les mesures correspondent à des angles différents.

Exercice 60P185



1. Comme le cosinus de l'angle vaut $-\frac{1}{3}$ je sais que l'ordonnée du point cherché est $-\frac{1}{3}$, donc je trace la verticale coupant l'axe des abscisses au point d'abscisse $-\frac{1}{3}$.
   Être sur $\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$ c'est être dans la partie en bas à gauche du cercle trigonométrique donc des deux points d'intersection entre le cercle trigonométrique je prends celui qui est dans le mon quadrant.
2. Je sais que pour toute mesure d'angle $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ (vois collège, ou on peut le montrer facilement avec Pythagore dans le triangle rectangle dont l'hypoténuse est le segment montrant l'angle et dont les côtés de l'angle droit sont verticaux et horizontaux)
   Ainsi $\sin^2(x)=1-\cos^2(x)$
   $\Leftrightarrow \sin^2(x)=1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2$
   $\Leftrightarrow \sin^2(x)=\frac{8}{9} \Leftrightarrow \sin x=\sqrt{\frac{8}{9}}$ ou $\sin x=-\sqrt{\frac{8}{9}}$ or l'angle est dans $\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$ donc le sinus est négatif, ainsi :
$$\sin x=-\sqrt{\frac{8}{9}}$$

Exercice 62P185
On va devoir, comme le titre de l'exercice le laisse entendre utiliser les formules d'angles associés.
On a à notre disposition les formules suivantes $-x;\pi-x;\pi+x;\frac{\pi}{2}-x$
Regardons les angles que ces formules permettent d'obtenir à partir de $\frac{2\pi}{5}$:
$-x=-\frac{2\pi}{5}$ inutile ici
$\pi-x=\frac{3\pi}{5}$;
ainsi $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=-\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
et $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
$\pi+x=\frac{7\pi}{5}$;
ainsi $\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)=\cos\left(\pi+\frac{2\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=-\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

et $\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi + \frac{2\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

$2\pi + x = \frac{12\pi}{5}$;

ainsi $\cos\left(\frac{12\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

et $\sin\left(\frac{12\pi}{5}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{10}$

ainsi $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

et $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\pi - \frac{\pi}{10} = \frac{9\pi}{10}$;

ainsi $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

et $\sin\left(\frac{9\pi}{10}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Exercice 87P187

Résoudre

Exercice 86P187 (en français)

a. $\frac{49\pi}{6}$ n'est pas facile à gérer , un tour complet correspond à $2\pi = \frac{12\pi}{6}$, à vue de nez je peux retirer 4 tours : $\frac{49\pi}{6} - 4 \times 2\pi = \frac{49\pi}{6} - 4 \times \frac{12\pi}{6} = \frac{49\pi}{6} - \frac{48\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ ainsi $\frac{49\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$ sont deux mesures du même angle.

Ainsi $\cos\left(\frac{49\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{9\pi}{2} + 2 \times 2\pi\right) = \sin\left(-\frac{9\pi}{2} + \frac{8\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

c. $\sin\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{13\pi}{3} - 2 \times 2\pi\right) = \sin\left(\frac{13\pi}{3} - \frac{12\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d. $\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{17\pi}{4} + 2 \times 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{17\pi}{4} + \frac{16\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e. $\sin\left(\frac{-59\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{-59\pi}{6} + 5 \times 2\pi\right) = \sin\left(\frac{-59\pi}{6} + \frac{60\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

f. $\cos\left(\frac{31\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{31\pi}{3} - 5 \times 2\pi\right) = \cos\left(\frac{31\pi}{3} - \frac{30\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

g.

Exercice 87P187

1) Résoudre $\cos X = \frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$ est simple c'est ce qu'on a fait jusqu'ici :

$$\cos X = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos X = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \quad ou \\ X = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Mais ici on vous demande de résoudre l'équation dans $]-\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{4}]$ autrement dit on va restreindre l'ensemble de solution que l'on vient de trouver et on ne garder que celles qui sont entre $-\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$. On regarde les deux lignes dans l'accolade et au brouillon on peut se faire une petite liste de valeurs et on va rayer celles qui ne sont pas dans l'intervalle :

$\frac{\pi}{3} + 2k\pi$: $\quad \frac{-11\pi}{3} < \frac{-5\pi}{3} < \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{3} < \frac{13\pi}{3}$

$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$: $\quad -\frac{13\pi}{3} < -\frac{7\pi}{3} < -\frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{3} < \frac{11\pi}{3}$

Avant de commencer à rayer, on se rend compte qu'on a un souci pour voir si on est ou si on n'est pas dans l'intervalle car on a des dénominateurs différents. On va devoir mettre les fractions au même dénominateur $3 \times 4 = 12$.

$]-\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{4}] =]-\frac{15\pi}{12};\frac{9\pi}{12}]$

$\frac{-44\pi}{12} < \frac{-20\pi}{12} < \boxed{\frac{4\pi}{12}} < \frac{28\pi}{12} < \frac{52\pi}{12}$

$-\frac{52\pi}{12} < -\frac{28\pi}{12} < \boxed{-\frac{4\pi}{12}} < \frac{20\pi}{12} < \frac{44\pi}{12}$
Ainsi sur $]-\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{4}]$, $\cos X = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow X = \frac{4\pi}{12}$ ou $X = \frac{-4\pi}{12}$

2) On vous propose de résoudre $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ sur $]-\pi;\pi]$
Si on veut faire ça en utilisant la méthode vue en classe on écrira :

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x-\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$, comme on veut faire cette résolution dans $]-\pi;\pi]$ je ne vais garder de toutes les solutions trouvées que celles qui sont dans l'intervalle. Ainsi $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12}$ ou $x = \frac{-\pi}{12}$

Attention vu qu'on vous propose de poser $X = x - \frac{\pi}{4}$ on pourra aussi rédiger de la manière suivante :

$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(X) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ X = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x-\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ je viens juste de remplacer X par $x-\frac{\pi}{4}$ en effet l'inconnue initiale de l'équation n'est pas X mais x.

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$, comme on veut faire cette résolution dans $]-\pi;\pi]$ je ne vais garder de toutes les solutions trouvées que celles qui sont dans l'intervalle. Ainsi $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12}$ ou $x = \frac{-\pi}{12}$

Quelle que soit la méthode on trouve bien les mêmes solutions.

Exercice 89P187

$$\cos(2t) = 0 \Leftrightarrow \cos(2t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ ou \\ 2t = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}, \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ ou \\ t = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$t = \frac{\pi}{4} + k\pi$ veut dire que t est dans la liste … ; $\frac{-11\pi}{4};\frac{-7\pi}{4};\frac{-3\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4};\frac{9\pi}{4}$; …
$t = \frac{-\pi}{4} + k\pi$ veut dire que t est dans la liste … ; $\frac{-9\pi}{4};\frac{-5\pi}{4};\frac{-\pi}{4};\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4};\frac{11\pi}{4}$; …
Donc si on ne veut que les solutions dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ on ne gardera que $\frac{-3\pi}{4};\frac{\pi}{4}$ d'une part et $\frac{-\pi}{4};\frac{3\pi}{4}$ d'autre part. Au final on a quatre valeurs possibles et non 2 comme proposé.

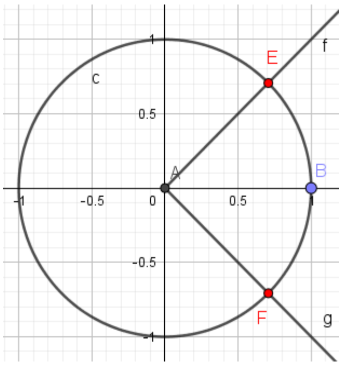
Pour faire l'exercice 90
Il faut se rappeler que si on ajoute 2π à la mesure d'un angle, on obtient une autre mesure du même angle.
Ça veut dire que $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$
Quel est l'intérêt ?
Des fois l'angle proposé dans l'énoncé est trop grand ou trop petit pour pouvoir calculer son cosinus ou son sinus facilement et là on sera amené à lui retrancher ou à lui ajouter des tours.
Exemple : $\cos(x-7\pi)$ on ne sait pas trop quoi faire de -7π, alors rajoutons des tours pour y voir plus clair :
$\cos(x-7\pi) = \cos(x-7\pi+2\pi) = \cos(x-5\pi)$ c'est mieux mais on n'a pas encore une forme exploitable, continuons et accélérons : $\cos(x-5\pi) = \cos(x-5\pi+3\times 2\pi) = \cos(x+\pi) = -\cos(x)$

Là je me suis permis de rajouter trois tours d'un coup.
Quand on fait l'exercice au propre on évite de mentionner les étapes intermédiaires, on les garde pour le brouillon, on ajoute un, deux, trois… tours et on s'arrête quand on a trouvé quelque chose d'exploitable.
Version finale sur la copie : $\cos(x-7\pi)=\cos(x-7\pi+4\times 2\pi)=\cos(x+\pi)=-\cos(x)$

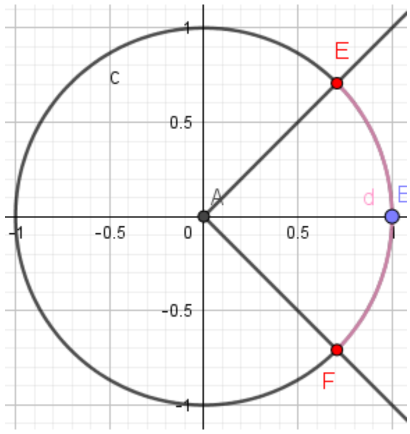
Exercice 93P187

1) $\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ ou \\ x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$, $k\in\mathbb{Z}$, on veut les solutions dans $]-\pi;\pi]$

autrement dit les solutions principales $\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$ ou $x=-\frac{\pi}{4}$

2) 

les points E et F correspondent aux solutions de $\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Si maintenant on veut $\cos(x)>\frac{\sqrt{2}}{2}$ on veut trouver les points du cercles associés à des angles ayant un plus gros cosinus autrement dit on veut des points dont l'abscisse du cercle dont l'abscisse est strictement plus grande que celles de E et F.
Les points attendus sont donc sur l'arc allant de E à F et situé à droite de (EF), attention E et F sont des points à exclure de cet arc car l'inégalité est stricte.



Exercice 95P187

1) On a $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ et on veut montrer que f est $T=\pi$ périodique autrement dit on veut prouver que $f(x+\pi)=f(x)$. Au travail !
$f(x+\pi)=\cos\left(2(x+\pi)+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x+2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}+2\pi\right)$
$=\cos\left(\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2\pi\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=f(x)$ donc la fonction f est bien π-périodique.
2) On a $f(x)=\sin(3\pi x)$ et on veut montrer que f est $T=\frac{2}{3}$ périodique autrement dit on veut prouver que $f\left(x+\frac{2}{3}\right)=f(x)$. Au travail !
$f\left(x+\frac{2}{3}\right)=\sin\left(3\pi\left(x+\frac{2}{3}\right)\right)=\sin\left(3\pi x+3\pi\frac{2}{3}\right)=\sin(3\pi x+2\pi)=\sin(3\pi x)=f(x)$
donc la fonction f est bien $\frac{2}{3}$-périodique.