Nom & Prénom : ……………………………………………………… www.dimension-k.com

Contrôle : dérivation (sujet A)

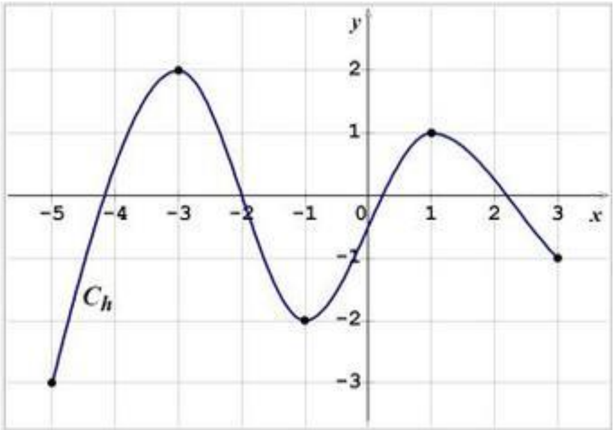
Exercice 1

Soit f la fonction définie sur R^* par $f(x) = \frac{3-4x}{x^2}$

1) Prouver que $f'(x) = \frac{4x-6}{x^3}$
2) Faire le tableau de variations de f
3) Donner l'équation de T_1 la tangente à C_f en $a = 1$. Cette droite est-elle montante ou descendante ?

Exercice 2

Soit la fonction h définie sur $[-5; 3]$ dont la représentation graphique est proposée à droite. Compléter le tableau de variations ci-dessous.



x	
$h(x)$	
$h'(x)$	

Nom & Prénom : ……………………………………………………… www.dimension-k.com

Contrôle : dérivation (sujet B)

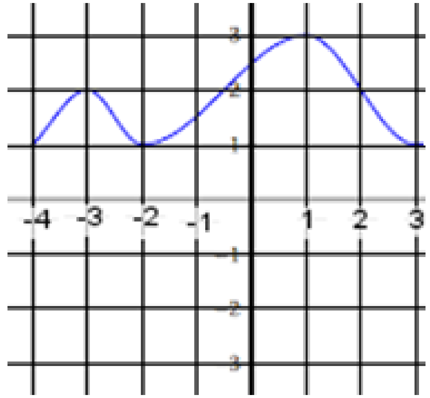
Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $R - \left\{-\frac{5}{4}\right\}$ par $f(x) = \frac{x^2}{4x+5}$

1) Prouver que $f'(x) = \frac{x(4x+10)}{(4x+5)^2}$
2) Faire le tableau de variations de f
3) Donner l'équation de T_{-1} la tangente à C_f en $a = -1$. Cette droite est-elle montante ou descendante ?

Exercice 2

Faire le tableau de variations de g (la fonction représentée ci-dessus) et dans le même tableau déduire les signes de g'



x	
$g(x)$	
$g'(x)$	

Exercice 3

Un générateur a une force électromotrice de 5 volts et une résistance interne de 3 ohms. Il débite dans un résistor de résistance variable x. On voudrait connaitre la valeur de x pour laquelle la puissance dissipée dans le résistor est maximale.

L'intensité dans le circuit est $I = \frac{5}{3+x}$ et la puissance dissipée dans le résistor est de $P = RI^2 = xI^2 = \frac{25x}{(3+x)^2}$.

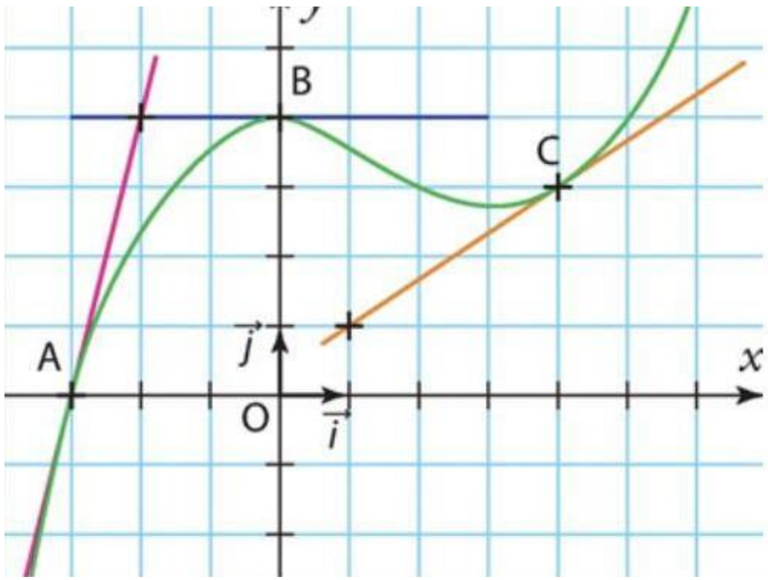
Posons $f(x) = \frac{25x}{(3+x)^2}$ où x est un réel positif ou nul.

1) Après avoir développé $(3+x)^2$ prouver que la dérivée de cette expression est $2(3+x)$
2) Montrer que $f'(x) = \frac{25(3-x)}{(3+x)^3}$
3) Déterminer le signe de $f'(x)$ et établir le tableau de variations de la fonction f.
4) Quelle est la puissance maximale $P_{\max}$ dissipée par le résistor ? Pour quelle valeur de x ?
5) Déterminer la ou les valeurs de x correspondant à une puissance dissipée par le resistor égale à $\frac{P_{max}}{2}$.

Exercice 4

Ci-contre vous avez la courbe représentative d'une fonction f.

Déterminer $f(-3)$, $f'(-3)$, $f(0)$ et $f'(0)$



Exercice 3

Un générateur a une force électromotrice de 12 volts et une résistance interne de 4 ohms. Il débite dans un résistor de résistance variable x. On voudrait connaitre la valeur de x pour laquelle la puissance dissipée dans le résistor est maximale.

L'intensité dans le circuit est $I = \frac{12}{4+x}$ et la puissance dissipée dans le résistor est de $P = RI^2 = xI^2 = \frac{144x}{(4+x)^2}$.

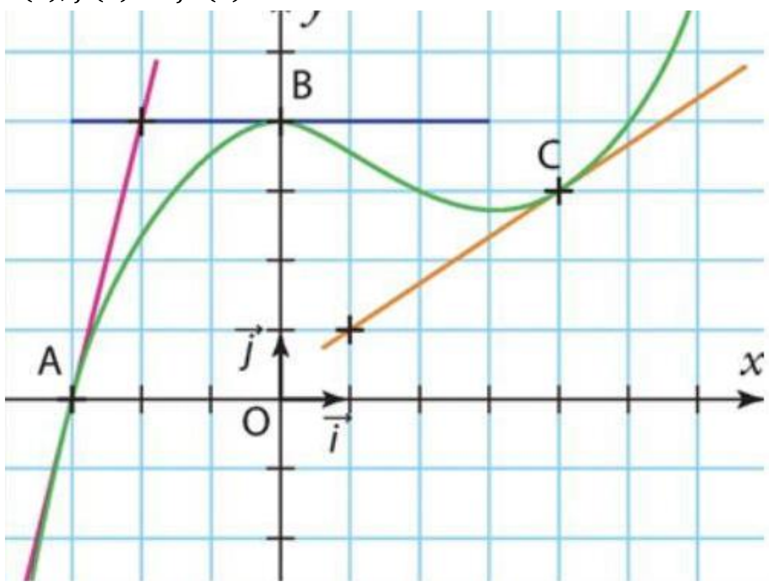
Posons $f(x) = \frac{144x}{(4+x)^2}$ où x est un réel positif ou nul.

1) Après avoir développé $(4+x)^2$ prouver que la dérivée de cette expression est $2(4+x)$
2) Montrer que $f'(x) = \frac{144(4-x)}{(4+x)^3}$
3) Déterminer le signe de $f'(x)$ et établir le tableau de variations de la fonction f.
4) Quelle est la puissance maximale $P_{\max}$ dissipée par le résistor ? Pour quelle valeur de x ?
5) Déterminer la ou les valeurs de x correspondant à une puissance dissipée par le resistor égale à $\frac{P_{max}}{2}$.

Exercice 4

Ci-contre vous avez la courbe représentative d'une fonction f.

Déterminer $f(4)$, $f'(4)$, $f(0)$ et $f'(0)$



Corrections

Sujet A $\frac{3-4x}{x^2}$

Exercice 1

Je reconnais $uv \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u = 3-4x$, $v = x^2$, $u' = -4$ et $v' = 2x$

On aura donc $f'(x) = \frac{-4x^2-(3-4x)2x}{(x^2)^2} = \frac{-4x^2-(6x-8x^2)}{x^4} = \frac{-4x^2-6x+8x^2}{x^4} = \frac{4x^2-6x}{x^4} = \frac{(4x-6)x}{x^4} = \frac{4x-6}{x^3}$

$4x-6 \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ $\qquad x \geq 0$

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x-6$		-		-	0	+	
x^3		-	0	+		+	
$f'(x)$		+	||	-	0	+	
$f(x)$		↗	||	↘	$-\frac{4}{3}$	↗	

$T_2: y = f'(a)(x-a)+f(a) \quad \Leftrightarrow \quad y = f'(1)(x-1)+f(1)$

Or $f(1) = \frac{3-4\times 1}{1^2} = -1$ et $f'(1) = \frac{4-6}{1^3} = -2$ et donc :

$T_2: y = -2(x-1)+(-1) \Leftrightarrow y = -2x+2-1 \Leftrightarrow y = -2x+1$

Exercice 2

le coefficient directeur étant négatif cette droite est descendante

x	-5		-3		-1		1		3
$h(x)$	-3	↗	2	↘	-2	↗	1	↘	-1
$h'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	

Sujet B $\frac{x^2}{4x+5}$

Je reconnais $uv \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u = x^2$, $v = 4x+5$, $u' = 2x$ et $v' = 4$

On aura donc $f'(x) = \frac{2x(4x+5)-x^2 4}{(4x+5)^2} = \frac{8x^2+10x-4x^2}{(4x+5)^2} = \frac{4x^2+10x}{(4x+5)^2} = \frac{x(4x+10)}{(4x+5)^2}$

$4x+10 \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq -10 \Leftrightarrow x \geq \frac{-10}{4} \Leftrightarrow x \geq -2{,}5$

$x \geq 0 \qquad 4x+5 \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq -5 \Leftrightarrow x \geq \frac{-5}{4}$

x	$-\infty$		$\frac{-5}{2}$		$\frac{-5}{4}$		0		$+\infty$
x		-		-		-	0	+	
$4x+10$		-	0	+		+		+	
$(4x+5)^2$		+		+	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	-	||	-	0	+	
$f(x)$		↗	$-\frac{5}{4}$	↘	||	↘	0	↗	

$T_2: y = f'(a)(x-a)+f(a) \quad \Leftrightarrow \quad y = f'(-1)(x-(-1))+f(-1)$

Or $f(-1) = \frac{(-1)^2}{4(-1)+5} = 1$ et $f'(-1) = \frac{-1(-4+10)}{(-4+5)^2} = -6$ et donc :

$T_2: y = -6(x+1)+1 \Leftrightarrow y = -6x-6+1 \Leftrightarrow y = -6x-5$

le coefficient directeur étant positif cette droite est croissante

x	-4		-3		-2		1		1
$g(x)$	1	↗	2	↘	1	↗	3	↘	1
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	

Exercice 3

1) $(3+x)^2 = 9 + 6x + x^2$ quand on dérive on a : $6 + 2x = 2(3+x)$
2) Montrer que $f'(x) = \frac{25(3-x)}{(3+x)^3}$

On reconnait $\frac{u}{v} \rightarrow \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u = 25x$, $u' = 25$, $v = (3+x)^2$ et $v' = 2(3+x)$

Ainsi $f'(x) = \frac{25(3+x)^2-25x2(3+x)}{((3+x)^2)^2} = \frac{25\left((3+x)^2-x2(3+x)\right)}{(3+x)^4} = \frac{25(3+x)\left((3+x)-x2\right)}{(3+x)^4}$
$= \frac{25(3+x-2x)}{(3+x)^3} = \frac{25(3-x)}{(3+x)^3}$

3) Déterminer le signe de $f'(x)$ et établir le tableau de variations de la fonction f.

x	0		3		$+\infty$
25		+		+	
$3-x$		+	0	-	
$(3+x)^3$		+		+	
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{25}{12}$	$\searrow$	

4) La puissance maximale dissipée par le résistor est $P_{\max} = \frac{25}{12} \approx 2{,}08$ et elle est atteinte pour $x = 3$.
5) A l'aide de la calculatrice on voit que $\frac{P_{max}}{2}$ est atteinte pour $x \approx 0{,}515$ et $x \approx 17{,}49$.

Exercice 4

Ci-contre vous avez la courbe représentative d'une fonction f.

Déterminer $f(-3) = 0$, $f'(-3) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{1} = 4$, $f(0) = 4$ et $f'(0) = 0$

Exercice 3

1) $(4+x)^2 = 16 + 8x + x^2$ quand on dérive on a : $8 + 2x = 2(4+x)$
2) Montrer que $f'(x) = \frac{25(3-x)}{(3+x)^3}$

On reconnait $\frac{u}{v} \rightarrow \frac{u'v-uv'}{v^2}$

avec $u = 144x$, $u' = 144$, $v = (4+x)^2$ et $v' = 2(4+x)$

Ainsi $f'(x) = \frac{144(4+x)^2-144x2(4+x)}{((4+x)^2)^2} = \frac{144\left((4+x)^2-x2(4+x)\right)}{(4+x)^4} = \frac{144(4+x)\left((4+x)-x2\right)}{(4+x)^4}$
$= \frac{144(4+x-2x)}{(4+x)^3} = \frac{144(4-x)}{(4+x)^3}$

3) Déterminer le signe de $f'(x)$ et établir le tableau de variations de la fonction f.

x	0		4		$+\infty$
144		+		+	
$4-x$		+	0	-	
$(4+x)^3$		+		+	
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	9	$\searrow$	

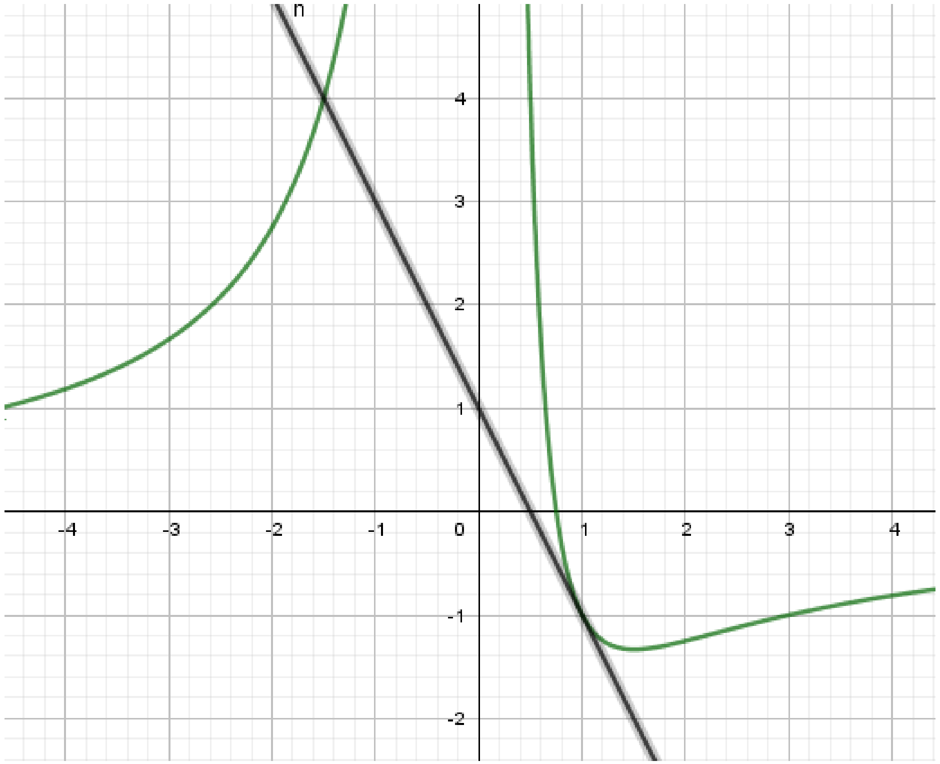
La puissance maximale dissipée par le résistor est $P_{\max} = \frac{432}{49}$

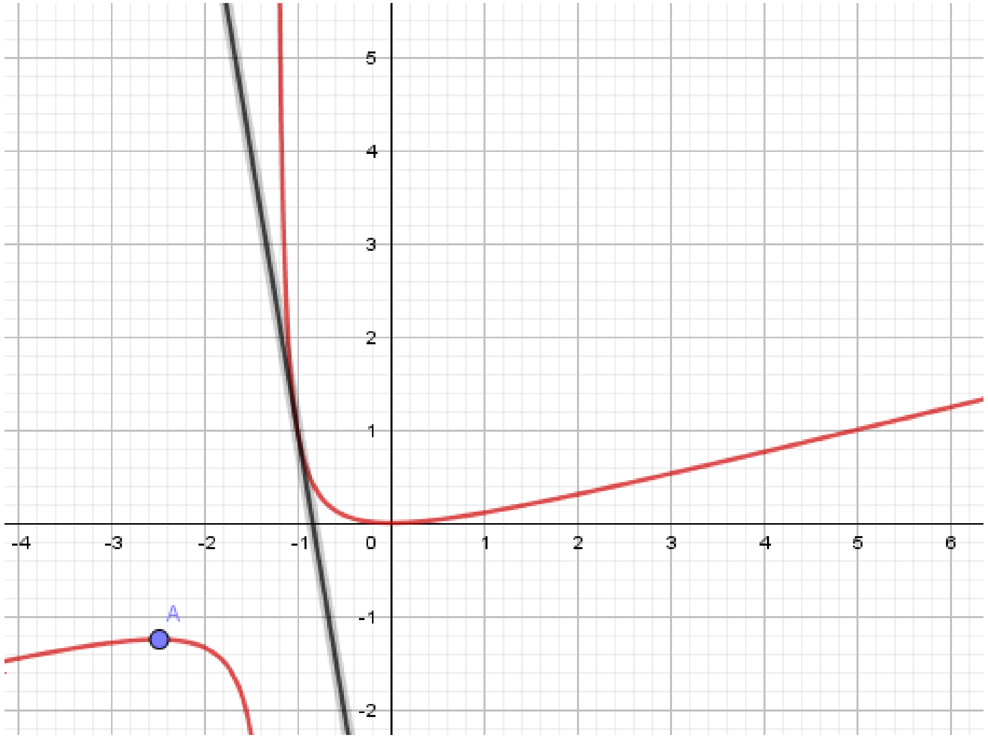
4) $\approx 8{,}81$ et elle est atteinte pour $x = 3$.
5) A l'aide de la calculatrice on voit que $\frac{P_{max}}{2}$ est atteinte pour $x \approx 0{,}667$ et $x \approx 24$.

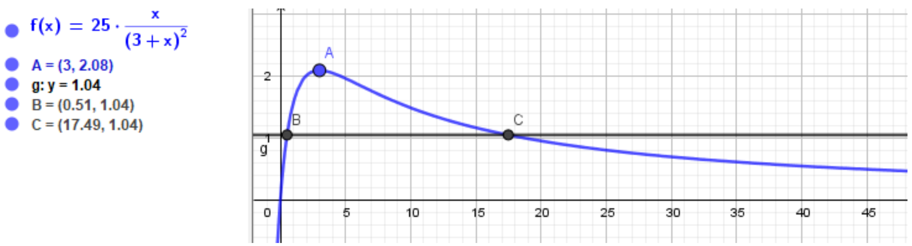
Exercice 4

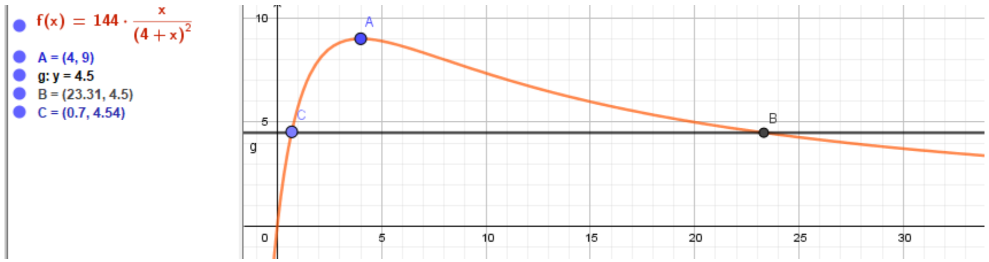
Ci-contre vous avez la courbe représentative d'une fonction f.

Déterminer $f(4) = 3$, $f'(4) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{3}$, $f(0) = 4$ et $f'(0) = 0$


n


A


$f(x) = 25 \cdot \frac{x}{(3+x)^2}$
A = (3, 2.08)
g: y = 1.04
B = (0.51, 1.04)
C = (17.49, 1.04)
A
B
C
g


$f(x) = 144 \cdot \frac{x}{(4+x)^2}$
A = (4, 9)
g: y = 4.5
B = (23.31, 4.5)
C = (0.7, 4.54)
A
B
C
g

x	$-\infty$		0		$2{,}8$		$+\infty$
$-5x+14$		+		+	0	-	
x^3		-	0	+		+	
$f'(x)$		-	||	+	0	-	
$f(x)$			||		$\frac{25}{28}$		

x	$-\infty$		0		$\frac{7}{3}$		$\frac{14}{3}$		$+\infty$
x		-		+		+	0	+	
$14-3x$		+		+		+		-	
$(7-3x)^2$		+		+	0	+		+	
$f'(x)$		-	0	+	||	+	0	-	
$f(x)$			0		||		$-\frac{28}{9}$		

x	-2		-1		1		4		5
$g(x)$	1		4		-2		6		3
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	

x	-2		-1		1		3		6
$g(x)$	2		-4		0		-4		5
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
8		+		+		+	
$1-t$		+		+	0	-	
$1+t$		-	0	+		+	
$(t^2+1)^2$		+		+		+	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$			-4		4		

x	0		1		$+\infty$
8		+		+	
$1-t$		+	0	-	
$1+t$		+		+	
$(t^2+1)^2$		+		+	
$c'(x)$		+	0	-	
$c(x)$	0		4		

x	0		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$-1{,}2$		-		-		-	
$t-3$		-		-	0	+	
$t-\frac{1}{3}$		-	0	+		+	
t^2+1		+		+		+	
$c(x)-1{,}2$		-	0	+	0	-	

Exercice 3 (version originale)

On injecte un antibiotique à un patient. On modélise la situation par une fonction c qui, à tout temps t, exprimé en heures, écoulé depuis l'injection, associe la concentration, exprimée en $mg.L^{-1}$ de l'antibiotique dans le sang du patient.

Cette fonction c est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $c(t)=\frac{8t}{t^2+1}$.

1. On note c' la fonction dérivée de la fonction c.
   a. Montrer que pour tout réel t positif ou nul, $c'(t)=\frac{8(1-t)(1+t)}{(t^2+1)^2}$.
   b. Etudier le signe de c' sur $[0;+\infty[$ et en déduire le tableau de variation de c.
   c. Au bout de combien de temps après l'injection la concentration de l'antibiotique est-elle maximale ? Préciser cette concentration maximale en $mg.L^{-1}$.
2. En antibiothérapie, on définit la CMI comme la concentration minimale d'antibiotique permettant d'empêcher la multiplication bactérienne. La CMI de l'antibiotique injecté est égale à $2{,}4 mg.L^{-1}$.

   On admettra que $c(t)-2{,}4=\frac{-2{,}4(t-3)\left(t-\frac{1}{3}\right)}{t^2+1}$
   a. Etudier le signe de cette expression sur l'intervalle $[0;+\infty[$
   b. Montrer que la concentration de l'antibiotique injecté est supérieure à sa CMI pendant 2 h 40.

Bonus : prouver que $c(t)-2{,}4=\frac{-2{,}4(t-3)\left(t-\frac{1}{3}\right)}{t^2+1}$

x	-5		-3		-1		1		3
$h(x)$			2				1		
	-3				-2				-1
$h'(x)$		+	0	-	0	+		-	

x	0		3		$+\infty$
25		+		+	
$3-x$		+	0	-	
$(3+x)^3$		+		+	
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$			$\frac{25}{12}$		
	0				

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x-6$		-		-	0	+	
x^3		-	0	+		+	
$f'(x)$		+	||	-	0	+	
$f(x)$			||				
			||		$-\frac{4}{3}$		

x	$-\infty$		$\frac{-5}{2}$		$\frac{-5}{4}$		0		$+\infty$
x		-		-		-	0	+	
$4x+10$		-	0	+		+		+	
$(4x+5)^2$		+		+	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	-	||	-	0	+	
$f(x)$			$-\frac{5}{4}$		||				
					||		0		

x	-4		-3		-2		1		1
$g(x)$			2				3		
	1				1				1
$g'(x)$		+	0	-		+		-	

x	0		4		$+\infty$
144		+		+	
$4-x$		+	0	-	
$(4+x)^3$		+		+	
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$			9		
	0				