Devoir surveillé : variations

Exercice 1

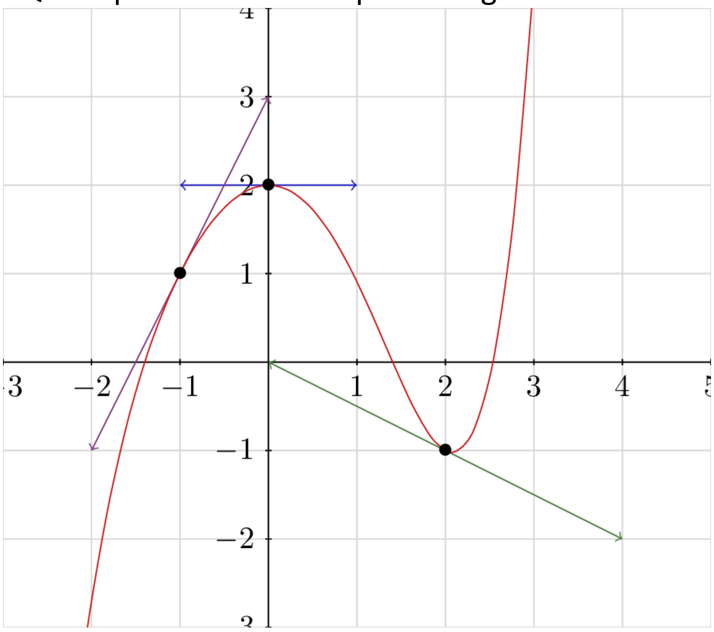
Soit f une fonction qui associent à tout réel x : $f(x) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{6}\right)$.

1) Etudier la parité de f
2) Montrer que la fonction f et de période 24π.
3) Inventer g une fonction paire et h une fonction de période π.

Exercice 2

Soit f la fonction qui est représentée sous la consigne.

1) Placer A, B et C les points de la courbe respectivement d'abscisse -1, 0 et 2.
2) Prévoir le signe $\tau(-1;0)$ et $\tau(0;2)$ sans faire le moindre calcul (à justifier
3) Calculer $\tau(-1;2)$. Que représente ce taux pour la figure ?



Exercice 3

1) En utilisant la courbe représentative de la fonction f , ci-contre déterminer $f(-1)$, $f'(-1)$, $f(0)$, et $f'(0)$
2) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x_0 = -1$.

Exercice 4

Soit f la fonction qui a tout réel x associe le réel $f(x) = x^2 - 2x + 5$

1) Déterminer le taux de variation $\tau(1;1+h)$
2) En déduire $f'(1)$, puis dire à quoi correspond cette valeur pour la figure.
3) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x_0 = 1$. Quelle particularité a cette droite ?

Exercice 5

Sans utiliser la fonction racine de votre calculatrice donner des approximations de $\sqrt{1{,}04}$ et $\sqrt{0{,}996}$ sachant que la courbe de la fonction racine admet une tangente en $A(1;1)$ d'équation : $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$,.

Correction

Exercice 1

Soit f une fonction qui associent à tout réel x : $f(x) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{6}\right)$.

1) $f(-x) = \cos\left(\frac{(-x)}{4}\right)\sin\left(\frac{(-x)}{6}\right) = \cos\left(-\frac{x}{4}\right)\sin\left(-\frac{x}{6}\right) = \left(+\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right)\left(-\sin\left(\frac{x}{6}\right)\right)$ car cos est paire et sinus est impaire. Ainsi $f(-x) = -\cos\left(\frac{x}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{6}\right) = -f(x)$ donc f est impaire.
2) $f(x+24\pi) = \cos\left(\frac{(x+24\pi)}{4}\right)\sin\left(\frac{(x+24\pi)}{6}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}+\frac{24\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{6}+\frac{24\pi}{6}\right)$ $= \cos\left(\frac{x}{4}+6\pi\right)\sin\left(\frac{x}{6}+4\pi\right) = \cos\left(\frac{x}{4}+3\times 2\pi\right)\sin\left(\frac{x}{6}+2\times 2\pi\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{6}\right)$ car les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodique. Ainsi $f(x+24\pi) = f(x)$ donc f est de période 24π.
3) $g(x) = a + bx^2$ avec a et b deux réels $h(x) = \cos(2x)$.

Exercice 2

Soit f la fonction qui est représentée sous la consigne.

1) Placer A, B et C les points de la courbe respectivement d'abscisse -1, 0 et 2.
2) $\tau(-1;0)$ est positive car -1 et 0 sont dans un intervalle où f est croissante. $\tau(0;2)$ est négative car 0 et 2 sont dans un intervalle sur lequel la fonction f est décroissante.
3) Calculer $\tau(-1;2) = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{-1-1}{3} = -\frac{2}{3}$. ce taux est le coefficient directeur de (AC).

Exercice 3

1) $f(-1) = 1$, $f'(-1) = 2$, $f(0) = 2$, et $f'(0) = 0$
2) la tangente à la courbe représentative de f en $x_0 = -1$ a pour équation :
$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow y = f'(-1)\big(x-(-1)\big) + f(-1)$
$\Leftrightarrow y = 2(x+1)+1 \Leftrightarrow y = 2x+2+1 \Leftrightarrow y = 2x+3$

Exercice 4

Soit f la fonction qui a tout réel x associe le réel $f(x) = x^2 - 2x + 5$

1) $\tau(1;1+h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = \frac{((1+h)^2-2(1+h)+5)-(1^2-2\times 1+5)}{1+h-1} = \frac{(1+2h+h^2-2-2h+5)-4}{h} = \frac{h^2+4-4}{h} =$ $\frac{h^2+4-4}{h} = \frac{h^2}{h} = h$
2) En déduire $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0}\tau(1;1+h) = \lim\limits_{h\to 0} h = 0$ ainsi le coefficient directeur de la tangente en $x_0 = 1$ à la courbe représentative de f est 0.
3) l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x_0 = 1$ est :
$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow y = f'(1)(x-1) + f(1)$
$\Leftrightarrow y = 0(x-1)+4 \Leftrightarrow y = 4$

Exercice 5

Sans utiliser la fonction racine de votre calculatrice donner des approximations de $\sqrt{1{,}04}$ et $\sqrt{0{,}996}$ sachant que la courbe de la fonction racine admet une tangente en $A(1;1)$ d'équation : $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$,.

Avec $x = 1{,}04$ $y = \frac{1}{2}1{,}04 + \frac{1}{2} = 0{,}52 + 0{,}5 = 1{,}02$ ainsi $\sqrt{1{,}04} \approx 1{,}02$

Avec $x = 0{,}996$ $y = \frac{1}{2}0{,}996 + \frac{1}{2} = 0{,}498 + 0{,}5 = 0{,}998$ ainsi $\sqrt{0{,}996} \approx 0{,}998$