DÉRIVATION (Partie 2)

I. Fonction dérivée

Définition :
La fonction qui à tout réel x associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note $f\,'$.

Notation : La fonction dérivée se note : f' ou $\frac{df}{dx}$

Formules de dérivation des fonctions usuelles :

Fonction f	Dérivée $f\,'$
$f(x) = a,$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'^{(x)} = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$

Avec $a \in \mathbb{R}$

Exemples :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3$.

Premières formules d'opération sur les fonctions dérivées :

$(u+v)' = u' + v'$	
$(ku)' = ku',$	$k \in \mathbb{R}$

Méthode : Calculer des fonctions dérivées

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de la fonction f :

1) $f(x) = 3x$ 2) $f(x) = x^2 + 5$ 3) $f(x) = 5x^3$ 4) $f(x) = 3x^2 + \frac{4}{x}$

II. Fonction dérivée d'une fonction polynôme

1) Fonction polynôme de degré 2

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$.
Pour déterminer la fonction dérivée $f\,'$, on applique la technique suivante :

$$f(x) = 5x^{2} \quad -3\cancel{x} \quad \cancel{+2}$$

$$f'(x) = 2 \times 5x \quad -3$$

Définition : Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On appelle **fonction dérivée** de f, notée f', la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2ax + b$.

Méthode : Déterminer la fonction dérivée d'une fonction polynôme du second degré

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4x^2 - 6x + 1$ b) $g(x) = x^2 - 2x + 6$ c) $h(x) = -3x^2 + 2x + 8$
d) $k(x) = x^2 + x + 1$ e) $l(x) = 5x^2 + 5$ f) $m(x) = -x^2 + 7x$

2) Fonction polynôme de degré 3

Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie par :
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$.
Pour déterminer la fonction dérivée f', on applique la technique suivante :

$$f(x) = 2x^{3\,2} \quad -3x^{2} \quad +5\cancel{x} \quad \cancel{-1}$$

$$f'(x) = 3 \times 2x^{2} \quad -2 \times 3x \quad +5$$

Définition : Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
On appelle **fonction dérivée** de f, notée f', la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Méthode : Déterminer la fonction dérivée d'une fonction polynôme du troisième degré

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ b) $g(x) = 5x^3 + 2x^2 + 2x - 7$
c) $h(x) = -2x^3 - 3x^2 - 7x + 8$ d) $k(x) = -x^3 + x^2 + 1$
e) $l(x) = 4x^3 + 1$ f) $m(x) = -x^3 + 7x$

III. Opérations sur les fonctions dérivées

1) Produit et quotient de fonctions dérivées :

$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Méthode : Calculer les dérivées de sommes, produits et quotients de fonctions

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = (3x^2 + 4x)(5x - 1)$ 2) $f_2(x) = \frac{1}{2x^2+5x}$ 3) $f_3(x) = \frac{6x-5}{x^3-2x^2-1}$

2) Dérivées de fonctions composées

Fonction	Dérivée
$A\cos(\omega t + \varphi)$	$-A\omega\sin(\omega t + \varphi)$
$A\sin(\omega t + \varphi)$	$A\omega\cos(\omega t + \varphi)$
$f(ax + b)$	$af'(ax + b)$

Méthode : Calculer les dérivées de fonctions composées

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 3\cos(2t + \pi)$ 2) $g(x) = -4\sin\left(-3t - \frac{\pi}{4}\right)$

IV. Application à l'étude des variations d'une fonction

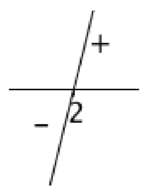
Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.

Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$.
1) Calculer la fonction dérivée de f.
2) Déterminer le signe de f ' en fonction de x.
3) Dresser le tableau de variations de f.

1) Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 2 \times 2x - 8 = 4x - 8$.

2) On commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
Soit : $4x - 8 = 0$
Donc $4x = 8$ et $x = \frac{8}{4} = 2$.
La fonction f ' est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur 4 est positif.
Elle est donc d'abord négative (avant $x = 2$) puis ensuite positive (après $x = 2$).



3) On dresse alors le tableau de variations en appliquant le théorème :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	-7	$\nearrow$	

En effet : $f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 1 = -7$.
La fonction f admet un minimum égal à –7 en $x = 2$.

V. Extremum d'une fonction

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle ouvert I.
Si la dérivée f ' de f s'annule et change de signe en un réel *c* de I alors f admet un extremum en x = *c*.

Méthode : Rechercher un extremum

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$ admet-elle un extremum sur $\mathbb{R}$?

Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 10x - 3$
Et : $f'(x) = 0$ pour $x = \frac{3}{10}$.
On dresse alors le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\frac{3}{10}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\frac{71}{20}$	$\nearrow$	

En effet : $f\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{71}{20}$
La fonction f admet donc un minimum égal à $\frac{71}{20}$ en $x = \frac{3}{10}$.