Chapitre

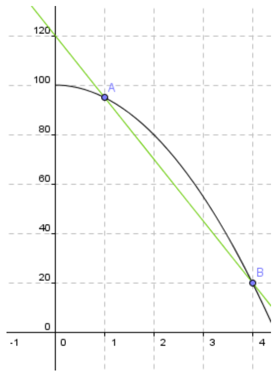
Dérivation. Etudes de fonctions.

I. Tangente et nombre dérivée

Définition

Le taux de variation de la fonction f entre a et , avec $a \neq b$, est le quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Avec $b = a + h$, $h \neq 0$, ce quotient s'écrit aussi $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$



Exemple :

On s'interesse à un objet en chute libre, laché d'une hauteur de 100m au moment x=0, sa hauteur est donnée par la fonction f définie sur $[0; \sqrt{20}]$ par : $f(x) = 100 - 5x^2$

Soient A et B les points d'abscisses 1 et 4, leurs ordonnées respectives sont donc $f(4)$ et $f(1)$

Le taux de variation de la fonction f entre 1 et 4 sera $\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{80-95}{3} = -5$

Propriété

Soit C la courbe représentative de f, A et B deux points distincts de cette courbe d'abscisses respectives a et b, alors le taux de variation entre a et b : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le coefficient directeur de la droite (AB).

Observation : plus B se rapproche de A (autrement dit plus h se rapproche de 0), plus la droite (AB) se rapproche d'une droite particulière, n'ayant qu'un point de contact (local) avec la courbe en A.

Définition

Supposons que pour les valeurs de h de plus en plus proche de zéro, avec $h \neq 0$, les nombres $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ deviennent de plus en plus proche d'un nombre fixé l.

Nous dirons alors que la fonction f est dérivable en a et que l est le nombre dérivé de f en a.

Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$ et il vaut $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Exemple

On considère la fonction f de l'exemple précédent. Et a = 1

Alors $f(1 + h) = 100 - 5(1 + h)^2 = 100 - 5(1 + 2h + h^2) = 95 - 10h - 5h^2$

Et $f(1) = 100 - 5 \times 1^2 = 95$ donc $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{95-10h-5h^2-95}{h} = \frac{-10h-5h^2}{h} = -10 - 5h$ donc quand h se rapproche de 0 , le taux de variation se rapproche de -10.

On a donc $f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} - 10 - 5h = -10$

La vitesse de l'objet sera après 1s de chute de 10m/s , le signe « - » vient de l'orientation du plan.

Définition

Soit f une fonction et C sa courbe représentative.

La droite Δ qui passe par le point A et dont le coefficient directeur est $l = f'(a)$ est la tangente en A à la courbe C

Exemple

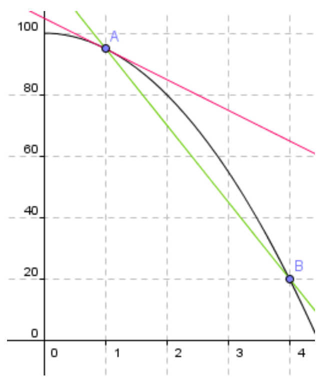
Pour la tangente Δ en A à la courbe des exemples précédents, son coefficient directeur est -10.

Son équation est donc $y = -10x + p$

Pour déterminer l'ordonnée à l'origine, je garde en tête que cette droite passe par $A(1, f(1))$ avec $f(1) = 95$

Et on a donc $95 = \ -10 \times 1 + p$ et donc $p = 105$.

Notre tangente a donc pour équation $y = -10x + 105$



II. Dérivées de fonctions usuelles

Définition
f est une fonction dérivable en tout point x d'un intervalle I inclus dans son ensemble de définition.
Alors la fonction $x \to f'(x)$, notée f' est appelée fonction dérivée de f sur I.

Propriété
Dans le tableau ci-contre sont compilées des fonctions de base et leurs dérivées

On peut demander aux élèves de démontrer ces formules sauf les deux dernières (racine peut tout de même se traiter avec la quantité conjuguée).

Fonction	**Dérivée**
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = x^n \; n \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = nx^{n-1}$

III. Opérations

Propriété
Soit $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux fonctions dérivables sur I et k un réel ,

alors les fonctions k u , u + v et u . v sont dérivables sur I et on a : $\begin{cases} (\boldsymbol{ku})' = \boldsymbol{k\,u'} \\ (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}' \\ (\boldsymbol{u\,v})' = \boldsymbol{u'v} + \boldsymbol{u\,v'} \end{cases}$

Exemples

Propriété
Soit $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux fonctions dérivables sur I et k un réel , et $\boldsymbol{v}$ ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{v}}$ et $\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}$ sont dérivables sur I et : $\begin{cases} \left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{v}}\right)' = -\frac{\boldsymbol{v}'}{\boldsymbol{v}^2} \\ \left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u'v - uv'}}{\boldsymbol{v}^2} \end{cases}$

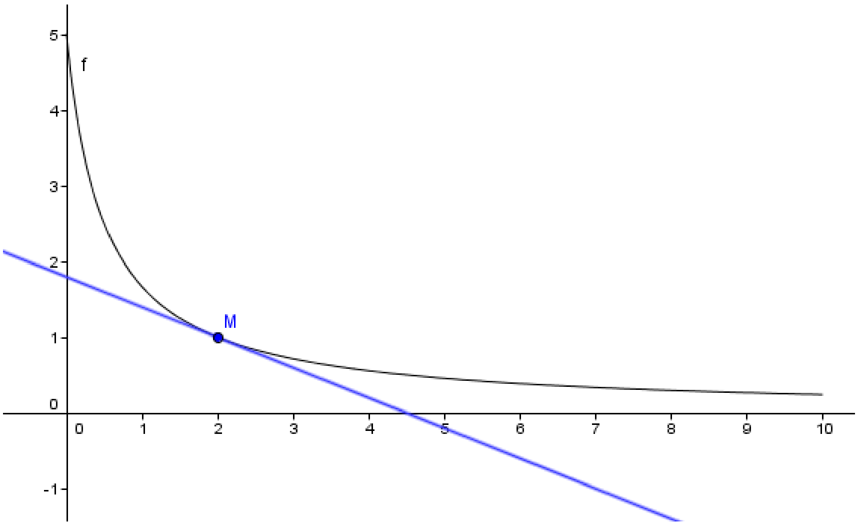
Exemples

IV. tangente

Propriété
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et a une valeur de cet intervalle alors l'équation de la tangente à C_f la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a est donnée par :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction définie sur $[0; 10]$ par $g(x) = \frac{5}{2x+1}$ en $a = 2$
Sur l'intervalle la fonction g admet pour dérivée $g'(x) = -\frac{10}{(2x+1)^2}$ ainsi :
$g(2) = 1$ et $g'(2) = -0{,}4$ ainsi l'équation de la tangente recherchée sera :
$y = f'(2)(x-2) + f(2) \Leftrightarrow y = -0{,}4(x-2) + 1 \Leftrightarrow y = -0{,}4x + 0{,}8 + 2 \Leftrightarrow y = -0{,}4x + 1{,}8$



V. Applications aux variations de fonctions

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I,

- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
- Si f' est positive ou nulle sur I, alors f est croissante sur I.
- Si f' est négative ou nulle sur I, alors f est décroissante sur I.

Pour démontrer qu'une fonction f est **strictement croissante** sur I, il suffit de démontrer que f est dérivable sur I et que sa dérivée f' est strictement positive sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points.

(Propriété similaire pour une fonction strictement décroissante)

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

$f(a)$ est le maximum de f sur I signifie que pour tout x de I, $f(x) \leq f(a)$.

$f(a)$ est le minimum de f sur I signifie que pour tout x de I, $f(x) \geq f(a)$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et c un point distinct de ses extrémités.

Dire que la fonction f admet un maximum local en c signifie que pour tout x d'un intervalle ouvert contenant c et inclus dans I on a : $f(x) \leq f(c)$

Dire que la fonction f admet un minimum local en c signifie que pour tout x d'un intervalle ouvert contenant c et inclus dans I on a : $f(x) \geq f(c)$

Propriété

• Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et si f admet un maximum ou un minimum en $x_0 \in I$ avec x_0 distinct des extrémités de I, alors $f'(x_0) = 0$.

• Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet en x_0 un extremum local.