DÉRIVÉES

I Nombre dérivé - Tangente

Exercice 01 (voir réponses et correction) (voir animation)

On considère la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 16$ pour $x \in [-4 ; 4]$.

1°) Tracer la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de f dans un repère d'unité 1cm.

2°) On admet que la courbe $(\mathscr{C})$ schématise un dôme à l'échelle 1/100.
Sur ce dôme se trouve un mât d'une hauteur de 1 mètre.
Quelles sont les coordonnées du point A représentant l'extrémité de ce mât ?

3°) Le point H de coordonnées $(a ; 0)$ avec $a > 4$ représente un objectif d'appareil photographique dirigé vers A. Justifier graphiquement que pour $a = 5$, l'extrémité du mât ne peut pas être photographiée.
Qu'en est-il pour $a = 12$?

4°) Quelle est la valeur minimale de a pour que l'objectif, correctement orienté, puisse photographier l'extrémité du mât.

Exercice 02 (voir réponses et correction) (voir animation)

1°) Tracer dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ la représentation graphique de la parabole d'équation $y = x^2$.

2°) On considère le point R d'abscisse 2 de la parabole et δ une droite passant par R.
Justifier que si δ est une droite parallèle à (Oy), elle a un seul point d'intersection avec la parabole.

Dans toute la suite on suppose que δ n'est pas parallèle à (Oy).

3°) a) Donner une équation de δ .
b) Étudier le nombre de points communs à δ et à la parabole et justifier qu'il existe une et une seule droite δ ayant un seul point commun avec la parabole. Donner le coefficient directeur de cette droite.

4°) Reprendre la question 3 avec le point R de la parabole d'abscisse 3.

5°) Reprendre la question 3 avec le point R d'abscisse r ($r \in$ IR).

Exercice 03 (voir réponses et correction)

Un mobile se déplace sur un axe $(O,\vec{u})$.
On suppose que sa position sur cet axe à l'instant t ($t \geqslant 0$) est donnée par son abscisse : $p(t) = t^2 + 2t$.
L'unité de longueur étant le mètre, l'unité de temps la seconde.

1°) Quelle sont les positions aux instants $t = 0$; $t = 1$; $t = 2$; $t = 3$. Faire un dessin.
Facultatif : justifier que le mobile se déplace dans le sens du vecteur $\vec{u}$, sans revenir en arrière.

2°) Déterminer la distance parcourue lorsque t varie de 1 à 3 .
Déterminer la vitesse moyenne sur l'intervalle $[1 ; 3]$.

3°) Donner les vitesses moyennes du mobile sur les intervalles
$[1 ; 2]$; $[1 ; 1,5]$; $[1 ; 1,25]$; $[1 ; 1,1]$; $[1 ; 1,01]$
Que peut-on conjecturer de la vitesse à l'instant $t = 1$? (vitesse instantanée)

Exercice 04 (voir réponses et correction) (voir animation)

1°) Tracer la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0 ; 3]$ par $f(x) = x^2 + 2x$
On prendra un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unités 2cm sur Ox et 0,5cm sur Oy.

2°) Placer sur la courbe le point P d'abscisse 1.

3°) Pour chacune des valeurs de x suivantes, calculer $f(x)$, placer le point M d'abscisse x de la courbe, tracer la droite (PM) et donner son coefficient directeur.
$x = 2$; $x = 1,5$; $x = 1,1$

4°) On considère le point M de la courbe d'abscisse $1 + h$ (avec h petit) .
Donner en fonction de h la valeur de $f(1 + h)$.
En déduire le coefficient directeur de la droite (PM).
Que devient la droite (PM) et que devient son coefficient directeur lorsque h tend vers 0.

Définition

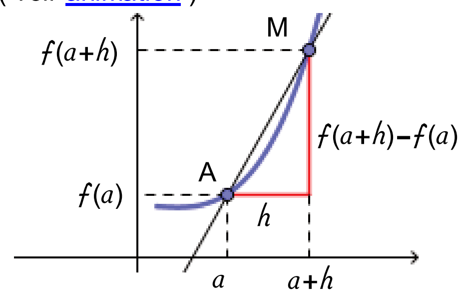
(voir animation)

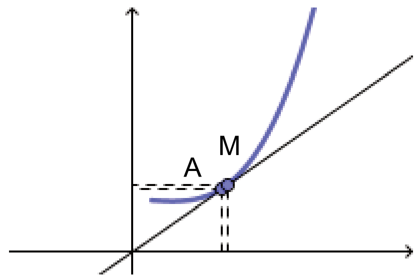
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit $a \in$ I et soit h non nul tel que $a + h \in$ I.

- On appelle taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ le nombre $T(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Si A est le point de la courbe de f d'abscisse a et M le point de la courbe de f d'abscisse $a + h$, $T(h)$ est le coefficient directeur de la droite (AM).
- Si le taux d'accroissement $T(h)$ de f entre a et $a + h$ tend vers un nombre réel quand h tend vers 0, ce nombre réel est appelé nombre dérivé de f en a et il est noté $f'(a)$.
  On dira alors que f est dérivable en a.

  On pourra écrire $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} T(h)$

  c'est-à-dire $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$





Exemple

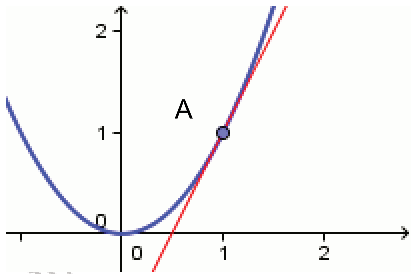
Considérons le point A d'abscisse 1 de la parabole représentant la fonction carré $f(x) = x^2$.
Si on considère un point M sur la courbe, proche du point A, l'abscisse de M peut s'écrire sous la forme $1 + h$ (avec h "petit") .
L'ordonnée du point M est alors $(1 + h)^2$.
Le coefficient de la droite (AM) est :

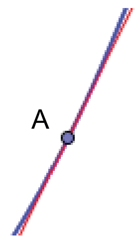
$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2 + h$$

On peut remarquer que lorsque h tend vers 0 , ce coefficient directeur tend vers 2.

On a donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2$

La fonction carré est donc dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.
Si on agrandit la parabole représentant la fonction carré au niveau du point A d'abscisse 1, on pourra remarquer que la courbe est presque confondue avec la droite passant par A et de coefficient directeur 2.





Exercice 05 (voir **réponses et correction**) (voir animation)

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x + 1$

1°) Déterminer les coordonnées du point A d'abscisse 2 de la courbe ($\mathscr{C}$) représentant la fonction f.

2°) Calculer $f(2 + h)$ et en déduire que $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = h + 3$

3°) Justifier que la fonction f est dérivable en 2 et donner la valeur de $f'(2)$.

4°) Démontrer que la droite d passant par A et de coefficient directeur 3 a pour équation $y = 3x - 3$.

5°) En utilisant le logiciel GeoGebra, tracer la courbe ($\mathscr{C}$), la droite d et placer le point A.
En faisant un zoom centré sur A, vérifier que la courbe ($\mathscr{C}$) et la droite d sont quasiment confondues au niveau du point A.

Exercice 06 (voir **réponses et correction**) (voir animation)

On considère la fonction inverse f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1°) Déterminer les coordonnées du point A d'abscisse 1 de la courbe ($\mathscr{C}$) représentant la fonction f.

2°) Calculer $f(1 + h)$ et en déduire que $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = -\dfrac{1}{1+h}$

3°) Justifier que la fonction f est dérivable en 1 et donner la valeur de $f'(1)$.

4°) Démontrer que la droite d passant par A et de coefficient directeur -1 a pour équation $y = -x + 2$.

5°) En utilisant le logiciel GeoGebra, tracer la courbe (C), la droite d et placer le point A.
En faisant un zoom centré sur A, vérifier que la courbe (C) et la droite d sont quasiment confondues au niveau du point A.

Exercice 07 (voir réponses et correction)

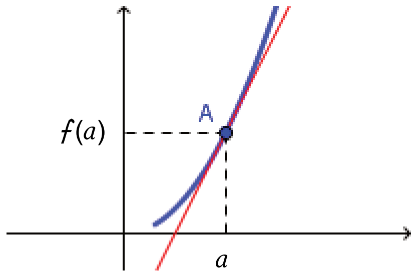
Soit f définie sur IR par $f(x) = 2x^2 - x$. Montrer que f est dérivable en 1 et donner la valeur de $f'(1)$.
Vérifier en utilisant une calculatrice ou un grapheur.

Exercice 08 (voir réponses et correction)

Soit f définie sur IR par $f(x) = x - x^2$. Montrer que f est dérivable en -2 et donner la valeur de $f'(-2)$.

Définition - Propriété (voir démonstration 01)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in$ I .
Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.
La droite T passant par A(a ; $f(a)$) et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée tangente à $(\mathscr{C})$ en A.
Cette tangente T a pour équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.



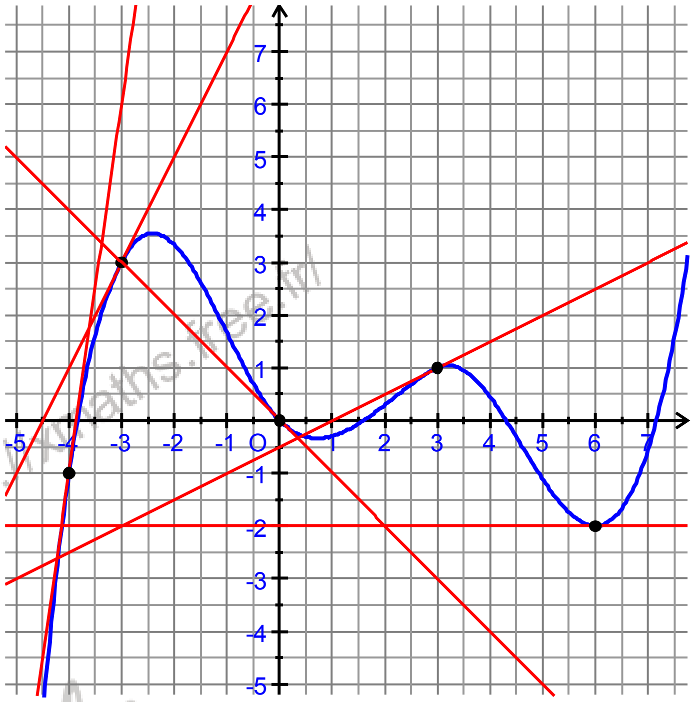
Cas particulier

Si $f'(a) = 0$, T est parallèle à l'axe des abscisses (horizontale).

Exercice 09 (voir réponses et correction)

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f et quelques-unes de ses tangentes.
Donner en utilisant ce graphique les valeurs de :

$f(-4)$	$f'(-4)$
$f(-3)$	$f'(-3)$
$f(0)$	$f'(0)$
$f(3)$	$f'(3)$
$f(6)$	$f'(6)$



Exercice 10 (voir réponses et correction)

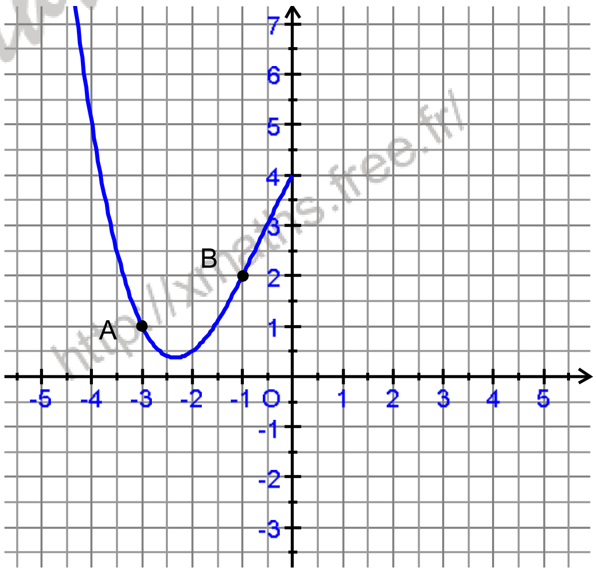
On donne ci-contre une partie de la courbe représentative d'une fonction f .

Déterminer les coordonnées des points A et B de la courbe. Interpréter ces résultats en utilisant la fonction f.

Tracer les tangentes à la courbe en A et en B en sachant que :
$f'(-3) = -2$; $f'(-1) = 2$

Prolonger la courbe en sachant que :

$f(1) = 5$; $f(3) = -2$; $f'(1) = 0$ et $f'(3) = -8$



Exercice 11 (voir réponses et correction)

Tracer la courbe d'une fonction f vérifiant

$f(-2) = 1$; $f(0) = \frac{1}{2}$; $f(2) = 2$; $f(5) = 1$

$f'(-2) = -\frac{1}{2}$; $f'(0) = 0$; $f'(2) = 1$; $f'(5) = -3$

Exercice 12 (voir réponses et correction)

Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$.

1°) Montrer que $\dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{3+h} + \sqrt{3}}$

En déduire, en utilisant la définition, que f est dérivable en 3 et donner la valeur de $f'(3)$.

2°) Soit $a \in [0\,;+\infty[$. Étudier la dérivabilité de f en a et donner, s'il existe, le nombre dérivé de f en a .

3°) En utilisant une calculatrice ou un ordinateur tracer la représentation graphique de f.

Que peut-on dire de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 ?

Exercice 13 (voir réponses et correction)

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = 3x - 5$.

Soit $x_0 \in$ IR Étudier la dérivabilité de f en x_0 et donner, s'il existe, le nombre dérivé en x_0 .

Exercice 14 (voir réponses et correction)

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = |x|$.

On rappelle que si $x \geqslant 0$, on a $f(x) = x$ et si $x < 0$ $f(x) = -x$.

Tracer la représentation graphique de f.

Soit $x_0 \in$ IR. Étudier la dérivabilité de f en x_0 et donner la valeur éventuelle de $f'(x_0)$.

(On pourra envisager plusieurs cas)

Exercice 15 (voir réponses et correction) (voir animation)

On considère la fonction définie sur IR par $f(x) = \left|x^2 - 4\right|$.

1°) Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $x^2 - 4$.

2°) En déduire, suivant les valeurs de x, une expression de $f(x)$ n'utilisant pas la valeur absolue.

3°) Tracer la représentation graphique de f.

4°) En utilisant GeoGebra :

a) Tracer la courbe représentative de f et vérifier la courbe tracée à la question précédente.

Avec GeoGebra l'expression de $f(x)$ s'écrit `abs(x^2 - 4)`

b) Définir un curseur a.

c) Tracer la tangente T à la courbe au point d'abscisse a.

Pour cela on pourra écrire dans le champ de saisie : `T=tangente[a,f]`

d) Déplacer le curseur a et constater le déplacement de la tangente.

Quelle est l'équation de la tangente lorsque a prend la valeur 1 ? lorsque a prend la valeur 2 ?

5°) Étudier la dérivabilité de f en 1 et en 2 et comparer avec les résultats de la question précédente.

Exercice 16 (voir réponses et correction) (voir animation)

Soit f définie sur IR par : $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$

1°) Tracer la courbe en utilisant GeoGebra.

2°) Placer sur la courbe le point A d'abscisse 1.

Définir un curseur m allant de -10 à 10 par pas de 0,5 et tracer la droite d passant par A et de coefficient directeur m. On pourra pour cela écrire dans le champ de saisie la commande `d=droite[A,A+(1,m)]`

En faisant varier m, vérifier que la valeur $m = -1$ correspond à la tangente à la courbe au point A.

3°) En utilisant la méthode précédente et en déplaçant le point A, compléter le tableau :

abscisse du point A : x	2	1	0	-1
coefficient directeur de la tangente $f'(x) = m$		-1		

4°) Dans le champ de saisie de GeoGebra écrire l'expression `f'(x)`

Vérifier, dans la fenêtre d'algèbre, que l'expression de $f'(x)$ est $3x^2 - 4x$.

En utilisant cette expression, calculer $f'(2)$; $f'(1)$; $f'(0)$ et $f'(-1)$ et vérifier les valeurs du 3°).

II Fonction dérivée - Opérations

Définition

Si une fonction f est dérivable en tout x d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I.
L'application qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f.
La fonction dérivée de f est notée f'.

Exemples

- Considérons la fonction carré f , définie sur IR par $f(x) = x^2$.
  Soit $a \in$ IR, on a $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \dfrac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \dfrac{2ah + h^2}{h} = \dfrac{h(2a+h)}{h} = 2a + h$.
  Par conséquent $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 2a + h = 2a$
  On en déduit que, pour tout $a \in$ IR, la fonction carré est dérivable en a et que $f'(a) = 2a$.
  La fonction carré est donc dérivable sur IR et sa fonction dérivée est la fonction f' définie par $f'(x) = 2x$.
- Considérons la fonction racine carrée f , définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
  On peut justifier (exercice 12) que pour tout $a > 0$, f est dérivable en a et que $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$
  La fonction racine carrée est donc dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa fonction dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercice 17 (voir réponses et correction)

On considère les fonctions f, g, ℓ définies sur IR par :
$f(x) = k$, $k \in$ IR $\qquad g(x) = x \qquad \ell(x) = mx + p$, $m \in$ IR et $p \in$ IR
En utilisant la définition, démontrer que ces fonctions sont dérivables sur IR et donner pour chacune d'elles sa fonction dérivée.

Exercice 18 (voir réponses et correction)

1°) On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = x^3$
En utilisant la définition, démontrer que f est dérivable sur IR et donner sa fonction dérivée.
2°) Avec le logiciel Geogebra :
entrer dans le champ de saisie l'expression `f(x) = x^2` (correspondant à la fonction carré)
puis entrer l'expression `f'(x)`
on voit apparaître dans la fenêtre d'Algèbre l'expression f′(x) = 2x (dérivée de la fonction carré)
entrer dans le champ de saisie `f(x) = x^3` (correspondant à la fonction cube)
l'expression de f′(x) aura été mise à jour et on doit obtenir f′(x) = 3x²
En modifiant l'expression de $f(x)$, compléter alors la deuxième ligne du tableau :

$f(x) = x^2$	$f(x) = x^3$	$f(x) = x^4$	$f(x) = x^5$	$f(x) = x^6$	$f(x) = x^7$
$f'(x) = 2x$	$f'(x) = 3x^2$				

Conjecturer l'expression de la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = x^{15}$
Conjecturer l'expression de la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = x^n$ avec n entier naturel non nul.

Exercice 19 (voir réponses et correction)

En reprenant le principe de l'exercice précédent, déterminer avec GeoGebra, la fonction f' dérivée de f dans chacun des cas suivants :

1°) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ 2°) $f(x) = \sqrt{x}$ (avec GeoGebra $\sqrt{x}$ s'écrit sqrt(x))

3°) $f(x) = \dfrac{3}{2x+1}$ $\qquad$ 4°) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Dérivées des fonctions usuelles

On donne ci-dessous les dérivées de fonctions rencontrées couramment.

Fonction	Dérivée	Ensemble
$f(x) = k$ (k constante)	$f'(x) = 0$	IR
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	IR
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	IR
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	IR
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	IR
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N} \quad n \neq 0$	$f'(x) = nx^{n-1}$	IR

Remarques

- Si f' est elle-même dérivable sur I, la dérivée de f' sera notée f'', on l'appelle dérivée seconde de f.
- La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. Sa courbe a, au point d'abscisse 0, une tangente qui est parallèle à l'axe Oy, c'est-à-dire une droite n'ayant pas de coefficient directeur.

Propriété (voir démonstration 02)

Si u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la somme $u + v$ est dérivable sur I et on a $(u + v)' = u' + v'$

Exemple

Soit f définie sur IR par $f(x) = x^2 + x$
On pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = x$.
Les fonctions u et v sont dérivables sur IR et on a $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 1$,
donc f est dérivable sur IR et $f'(x) = 2x + 1$

Exercice 20 (voir réponses et correction)

Pour chacune des fonctions f , donner l'expression de sa dérivée f'.

1°) $f(x) = x^2 + 5x$ 2°) $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$ 3°) $f(x) = x^2 - x$

4°) $f(x) = x^3 + 3x + 1$ 5°) $f(x) = -2x + 1$ 6°) $f(x) = \dfrac{3x + 1}{2}$

Exercice 21 (voir réponses et correction)

Pour chacune des fonctions f , donner l'expression de sa dérivée f'.

1°) $f(x) = x^4 - 2x - 3$ 2°) $f(x) = \dfrac{1}{x} - 5$ 3°) $f(x) = \dfrac{3 - 2x}{5}$

4°) $f(x) = x^5 + x^4$ 5°) $f(x) = x^3 - 2x - 1$ 6°) $f(x) = 1 - 3x + \sqrt{x}$

Propriété (voir démonstration 03)

Si u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction $u \times v$ est dérivable sur I et on a $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

Cas particulier

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, et k un réel (une constante), alors la fonction ku est dérivable sur I et on a $(ku)' = k\,u'$

Exemples

- Soit f définie sur IR par $f(x) = (x^2 + x)(1 - x)$ On pose $u(x) = x^2 + x$ et $v(x) = 1 - x$
  les fonctions u et v sont dérivables sur IR et on a $u'(x) = 2x + 1$ et $v'(x) = -1$
  alors f est dérivable sur IR et $f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$
  donc $f'(x) = (2x + 1)(1 - x) + (x^2 + x)(-1) = 2x - 2x^2 + 1 - x - x^2 - x = -3x^2 + 1$
  NB : On pourrait aussi écrire $f(x) = (x^2 + x)(1 - x) = x^2 - x^3 + x - x^2 = -x^3 + x$
  et dériver en utilisant cette expression. Le résultat est bien entendu identique.
- Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$ On pose $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$
  les fonctions u et v sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$ et on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
  alors f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$
  donc $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{x}{2\sqrt{x}}$
  Sachant que $x = (\sqrt{x})^2$, on peut simplifier l'expression de $f'(x)$
  $f'(x) = \sqrt{x} + \dfrac{(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2}$ donc $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$
  NB : La fonction racine carrée n'étant pas dérivable en 0, on ne peut utiliser la formule que sur l'intervalle ouvert $]0\,;+\infty[$
- Soit f définie sur IR par $f(x) = 5x^2$
  On pose $u(x) = x^2$ et $k = 5$, on a alors $f(x) = k\,u(x)$
  la fonction u est dérivable sur IR et on a $u'(x) = 2x$, alors f est dérivable sur IR et $f'(x) = k\,u'(x)$
  donc $f'(x) = 5 \times 2x$ c'est-à-dire $f'(x) = 10x$

Exercice 22 (voir **réponses et correction**)

Pour chacune des fonctions, donner l'ensemble sur lequel elle est dérivable et calculer sa dérivée.

1°) $f(x) = 3\sqrt{x}$
2°) $f(x) = \dfrac{2}{x}$
3°) $f(x) = 5x^5 - 3x^2$
4°) $f(x) = (2x^2 - 1)(4x^3 + 1)$
5°) $f(x) = x^2\sqrt{x}$
6°) $f(x) = (2x + 1) \times \dfrac{1}{x}$

Exercice 23 (voir **réponses et correction**)

Pour chacune des fonctions, donner l'ensemble sur lequel elle est dérivable et calculer sa dérivée.

1°) $f(x) = -7x^2 + 5\sqrt{x}$
2°) $f(x) = 8x^4 - 7x^3 + 3x^2 - \dfrac{7}{x}$
3°) $f(x) = 8\sqrt{x} + \dfrac{3}{x}$
4°) $f(x) = (-3x - 5)(x^2 + 3x + 7)$

Exercice 24 (voir **réponses et correction**)

Pour chacune des fonctions, donner l'ensemble sur lequel elle est dérivable et calculer sa dérivée.

1°) $f(x) = 6\sqrt{x} - 5x^3$
2°) $f(x) = \sqrt{x} \times \dfrac{1}{x}$
3°) $f(x) = (\sqrt{x} + 1)(5x^2 + 3x + 7)$
4°) $f(x) = (x^2 - 2x - 1)^2$

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et si u ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et on a $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

Exemple

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$. f est définie sur IR (car $x^2 + 1 \neq 0$ pour tout réel x)

On pose $u(x) = x^2 + 1$. La fonction u est dérivable sur IR et ne s'annule pas. On a $u'(x) = 2x$.

donc f est dérivable sur IR et $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$ pour tout $x \in$ IR .

Exercice 25 (voir réponses et correction)

Pour chacune des fonctions, donner l'ensemble sur lequel elle est dérivable et calculer sa dérivée.

1°) $f(x) = \dfrac{1}{2x + 1}$; 2°) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; 3°) $f(x) = \dfrac{1}{3 - 5x}$; 4°) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + x}$

Exercice 26 (voir réponses et correction)

Pour chacune des fonctions, donner l'ensemble sur lequel elle est dérivable et calculer sa dérivée.

1°) $f(x) = -\dfrac{3}{2x - 6}$; 2°) $f(x) = \dfrac{5}{x^3}$; 3°) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$; 4°) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Propriété

Si u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I et si v ne s'annule pas sur I,

alors la fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et on a $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

Exemple

Soit f définie sur IR par $f(x) = \dfrac{-3x + 5}{x^2 + 1}$. On pose $u(x) = -3x + 5$ et $v(x) = x^2 + 1$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur IR et v ne s'annule pas (car $x^2 + 1 \geqslant 1$ pour tout réel x).
On a $u'(x) = -3$ et $v'(x) = 2x$. Alors f est dérivable sur IR et

$$f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{-3(x^2 + 1) - (-3x + 5)(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-3x^2 - 3 + 6x^2 - 10x}{(x^2 + 1)^2}$$

donc $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 10x - 3}{(x^2 + 1)^2}$ pour tout $x \in$ IR.

Remarque

L'utilisation des propriétés permet de justifier que les fonction polynômes sont dérivables sur IR.
On appelle fonction rationnelle toute fonction s'exprimant comme le quotient de deux polynômes.
Les fonctions rationnelles sont dérivables sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

Exercice 27 (voir réponses et correction)

Pour chacune des fonctions, donner l'ensemble sur lequel elle est dérivable et calculer sa dérivée.

1°) $f(x) = \dfrac{x + 2}{2x - 3}$; 2°) $f(x) = \dfrac{2 + 3x}{x^2 + 1}$; 3°) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$; 4°) $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x^2 + 3}$

Exercice 28 (voir réponses et correction)

Pour chacune des fonctions, donner l'ensemble sur lequel elle est dérivable et calculer sa dérivée.

1°) $f(x) = \dfrac{3 - 5x}{x - 1}$; 2°) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 3x}$; 3°) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{3x^2 + 1}$; 4°) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$

Exercice 29 (voir réponses et correction)

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ $\qquad g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{5}$ $\qquad h(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$

$p(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - x^3 + \dfrac{5}{3}x$ $\qquad q(x) = x + \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ $\qquad r(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3}$

Exercice 30 (voir réponses et correction)

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = \dfrac{3}{2x}$ $\qquad g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 3}$ $\qquad h(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1}$

$p(x) = (x - 3)\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$ $\qquad q(x) = (x^2 - 3)\sqrt{x}$ $\qquad r(x) = (2x + 1)^2$

Exercice 31 (voir **réponses et correction**) (voir animation)

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$.

La courbe représentative de f a-t-elle des tangentes parallèles à la droite d'équation $y = -x + 1$?
Si oui en quels points ? Vérifier en traçant la courbe de f avec une calculatrice ou un grapheur.

III Application aux variations d'une fonction

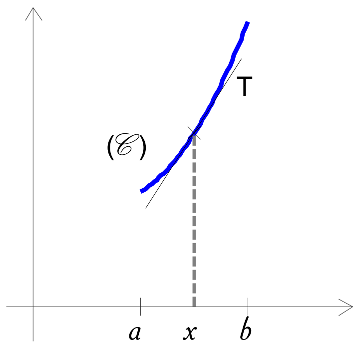
Exemple

Soit f une fonction croissante sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Pour tout réel x dans l'intervalle $[a\,;\,b]$, $f'(x)$ est le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $(\mathscr{C})$ de f au point d'abscisse x.

Une interprétation graphique montre que, la fonction f étant croissante, ce coefficient directeur est positif.

Si f est croissante sur $[a\,;\,b]$ on a donc $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a\,;\,b]$.

Pour une fonction décroissante, on aurait une dérivée négative.



Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est constante sur I, alors f' est nulle sur I.
- Si f est croissante sur I, alors f' est positive ou nulle sur I.
- Si f est décroissante sur I, alors f' est négative ou nulle sur I.

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
- Si f' est positive ou nulle sur I, alors f est croissante sur I.
- Si f' est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est négative ou nulle sur I, alors f est décroissante sur I.
- Si f' est strictement négative sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

Exercice 32 (voir **réponses et correction**)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$.

1°) f est une fonction trinôme du second degré. Justifier que f a un minimum et calculer ce minimum.

2°) Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.
Retrouver le fait que f a un minimum.

Exemple : Tableau de variations

Considérons la fonction f définie sur $[0\,;4]$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$.
On a $f'(x) = 3x^2 - 3 \times 2x = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.
$f'(x)$ est un trinôme du second degré dont les racines sont 0 et 2.
D'après la règle du signe du trinôme on a : $f'(x) \leqslant 0$ pour $x \in \,]0\,;2[$ et $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \in \,]2\,;4]$
On en déduit que f est décroissante sur $[0\,;2]$ et f est croissante sur $[2\,;4]$.
On peut résumer les variations de f dans son tableau de variations :
Dans ce tableau on fait figurer les valeurs particulières :

$f(0) = -1$

$f(2) = 8 - 12 - 1 = -5$

$f(4) = 64 - 48 - 1 = 15$

On peut considérer ce tableau comme une représentation graphique schématisée de f.

x	0		2		4
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
f	-1	↘	-5	↗	15

Courbe représentative

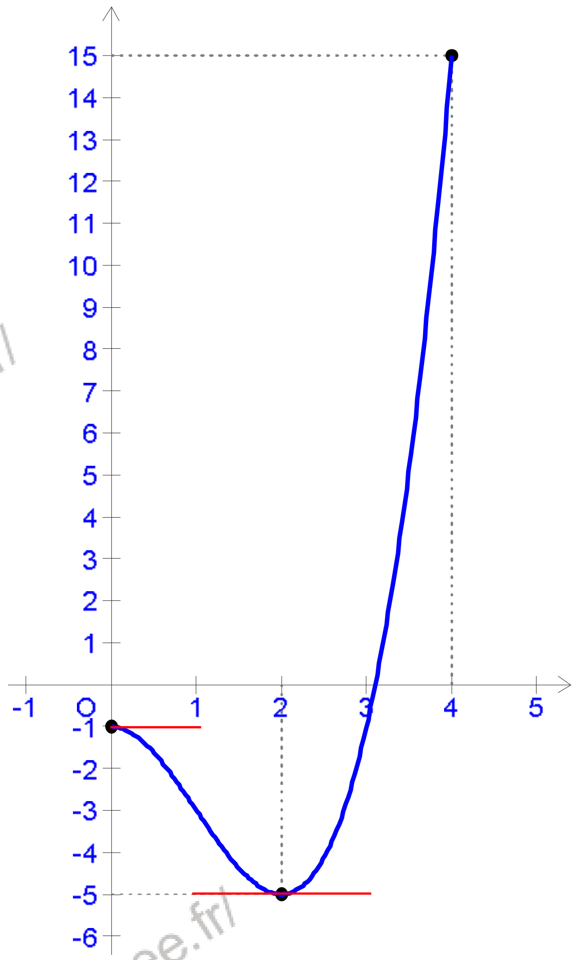
Pour tracer la représentation graphique de la fonction f, on placera les points particuliers obtenus dans le tableau de variations.

On fera apparaître les tangentes parallèles à (Ox)
(Ce sont les tangentes aux points dont l'abscisse est racine de la dérivée $f'(x)$).

On cherchera éventuellement quelques points supplémentaires puis on tracera la courbe de façon "harmonieuse" et conformément au sens de variation annoncé dans le tableau de variations.

Si les unités ne sont pas imposées, elles seront judicieusement choisies.

On trace ci-contre la courbe représentant la fonction f définie sur $[0 ; 4]$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$ étudiée dans l'exemple précédent.
Les points particuliers sont les points de coordonnées $(0 ; -1)$; $(2 ; -5)$ et $(4 ; 15)$
La dérivée s'annule en 0 et 2.
La courbe a donc des tangentes parallèles à (Ox) en ses points d'abscisses 0 et 2.
On trace ces deux tangentes, puis on trace la courbe.



Exercice 33 (voir réponses et correction)

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$.
Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.
Donner le tableau de variation de f sur $[-4 ; 3]$.
Tracer la courbe représentative de f sur $[-4 ; 3]$.

Exercice 34 (voir réponses et correction)

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 9]$ par $f(x) = \dfrac{5 + x}{1 + x}$

1°) Déterminer la dérivée de f et étudier son signe.
2°) Donner le tableau de variations de f.
3°) Donner en utilisant ce tableau le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[0 ; 9]$.

Exercice 35 (voir réponses et correction)

Une pompe est utilisée pour faire circuler un fluide dans un circuit.
Pour diverses raisons (viscosité du fluide, efficacité de la pompe, nature du circuit..) le débit varie en fonction de la température. Ce débit, exprimé en litres par heure, est donné en fonction de la température x exprimée en degrés par $f(x) = 1 + \dfrac{3x + 4}{1 + x^2}$ avec $x \in [-5 ; 5]$.

1°) a) Représenter graphiquement f en utilisant une calculatrice ou un ordinateur.
b) En utilisant ce graphique, estimer le débit maximal et la température correspondante.
2°) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
3°) Donner le tableau de variations de f pour $x \in [-5 ; 5]$ et vérifier les résultats trouvés dans le 1°)
4°) Déterminer, par le calcul, les solutions de l'équation $f(x) = 2$. Quelle interprétation peut-on donner de ce résultat ?
5°) Quelle est la plage de température pour laquelle le débit sera d'au moins 3 litres par heure ?

Exercice 36 (voir réponses et correction)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{ -1 \}$ par $f(x) = ax + b + \dfrac{16}{x+1}$ où a et b sont deux réels fixés.

Déterminer a et b en sachant que la courbe de f passe par le point A(1 ; 2) et qu'elle a, en ce point, une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
Vérifier en traçant la courbe avec une calculatrice ou avec un ordinateur.

Exercice 37 (voir réponses et correction)

Soit f la fonction définie sur $[-4 ; 2]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 3$

Soit $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité 1cm.
Étudier les variations de f et donner son tableau de variations.
Donner l'équation de la tangente T à la courbe $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse -1.
Étudier le signe de $f(x) - \left(-x - \dfrac{10}{3}\right)$. En déduire la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à T.
Tracer $(\mathscr{C})$ et T sur un même dessin.
Calculer $f''(x)$ et justifier que $f''(x)$ s'annule et change de signe en -1.

Exercice 38 (voir réponses et correction)

La courbe représentative d'une fonction f coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 5, coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 1 et a une tangente horizontale en son point de coordonnées (2 ; -3).
Est-il possible que f soit une fonction polynôme de degré 2 ? de degré 3 ?

Exercice 39 (voir réponses et correction)

Soit f la fonction définie sur $[-2 ; 2]$ par : $f(x) = x^4 - 2x^2$
Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
Donner le tableau de variations de f.
Tracer la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité 1cm.

Exercice 40 (voir réponses et correction)

Une entreprise produit des crayons de couleur en quantité journalière q (exprimée en milliers).
Lorsque la quantité q est comprise entre 4 et 10, on admet que le coût de production journalier, exprimé en euros, est donné par : $C(q) = q^3 - 48q + 600$.
L'entreprise vend chaque millier de crayons 99 euros.

1°) En supposant que toute la production est vendue, déterminer la recette journalière en fonction de q.
2°) Montrer que le bénéfice journalier $B(q)$, exprimé en euros, est donné par :
$B(q) = -q^3 + 147q - 600$ avec $q \in [4 ; 10]$.
3°) Calculer $B'(q)$ où B' désigne la dérivée de la fonction B.
4°) Étudier le signe de $B'(q)$ sur l'intervalle $[4 ; 10]$. Dresser le tableau de variations de la fonction B.
5°) En déduire le nombre de milliers de crayons à produire quotidiennement pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est alors ce bénéfice maximal ?
6°) Représenter graphiquement la fonction B.
En utilisant ce graphique, déterminer le nombre de solutions de l'équation $B(q) = 0$ et donner des valeurs approchées de ces solutions.
7°) Déterminer graphiquement les productions qui assurent à l'entreprise un bénéfice positif.