Devoir surveillé
Troisième degré et dérivées

Exercice 1

Soit f et g les fonctions qui a tout réel x associent respectivement les réels $f(x) = 0{,}5(x-5)(x-2)(x+1)$ et $g(x) = -1(x-2)(x+3)^2$

1) Faire un tableau de signe complet (traitant de chaque facteur) pour la fonction f
2) Faire une figure à main levée puis le tableau de signe correspondant pour g.

Exercice 2

Soit g la fonction qui a tout réel x associe le réel $g(x) = -4x^3 + 7$

1) Donner l'image de -3 par g
2) Donner une valeur exacte de l'antécédent de 5 par g, puis un arrondi à 10^{-3}

Exercice 3

Dériver les fonctions suivantes :

$f(x) = -7x^2 + 3x + 4$ définie sur $\mathbb{R}$

$g(x) = \frac{7}{3x} - \frac{5x^6}{12}$ définie sur $]-\infty; 0[$

$h(x) = x^2 \sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$

Exercice 4

Soit f la fonction qui a tout réel x associe le réel $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$

Partie 1

1) Dériver f
2) Déterminer une racine évidente de f'
3) En déduire la seconde racine, puis une écriture factorisée de f

Partie 2

Soit une fonction g admettant pour dérivée $g'(x) = 3(x-5)(x+1)$

1) Faire un tableau de signe pour la fonction g'
2) En déduire les variations de g que vous indiquerez dans le tableau précédent une fois rallongé.

Exercice 5

Soit f la fonction qui a tout réel x associe le réel $f(x) = \frac{x^4}{9} - 5x$

1) Dériver f
2) Donner la formule de la tangente à C_f la courbe représentative de f au point d'abscisse a.
3) En déduire l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse $a = 3$.
4) En utilisant cette tangente donner une approximation de $f(3{,}027)$ et de $f(2{,}91)$

Correction

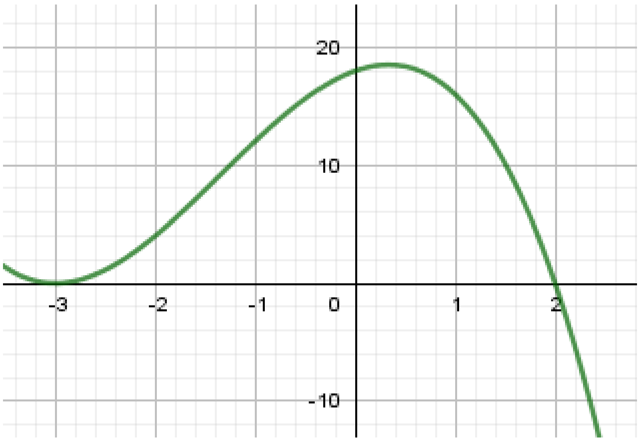
Exercice 1

1)

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
0,5		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2)

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	



Exercice 2

1) $g(-3) = -4 \times (-3)^3 + 7 = 115$
2) $g(x) = 5 \Leftrightarrow -4x^3 + 7 = 5 \Leftrightarrow -4x^3 = 5 - 7 \Leftrightarrow x^3 = \frac{-2}{-4} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ ainsi l'antécédent vaut à peu près 7,94.

Exercice 3

$f(x) = -7x^2 + 3x + 4$ donc $f'(x) = -14x + 3$

$g(x) = \frac{7}{3x} - \frac{5x^6}{12}$ définie sur $]-\infty; 0[$ ainsi : $g(x) = \frac{7}{3} \times \frac{1}{x} - \frac{5}{12}\ x^6$
donc $g'(x) = \frac{7}{3}\left(\frac{-1}{x^2}\right) - \frac{5}{12}(6x^5) = \frac{-7}{3x^2} - \frac{30}{12}x^2 = \frac{-7}{3x^2} - \frac{5}{2}x^2$

$h(x) = x^2 \sin(x)$ je reconnais $(uv)' = u'v + uv'$avec :
$u = x^2$, $u' = 2x$, $v = \sin x$ et $v' = \cos x$ ainsi :

$$h'(x) = 2x \sin x + x^2(\cos x)$$

Exercice 4

Soit f la fonction qui a tout réel x associe le réel $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$

Partie 1

1) $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$
2) $f'(-1) = 3 \times (-1)^2 - 12 \times (-1) - 15 = 3 + 12 - 15 = 0$ donc -1 est une racine évidente.
3) On sait que si $x_1$et x_2 sont les racines d'un polynôme de la forme $ax^2 + bx + c$ alors $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ainsi $x_2 = \frac{c}{ax_1} \Leftrightarrow x_2 = \frac{-15}{3\times(-1)} \Leftrightarrow x_2 = 5$ ainsi $f'(x) = 3(x - (-1))(x - 5) = 3(x + 1)(x - 5)$
4)

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
3		+		+		+	
$x - 5$		$-$		$-$	0	+	
$x + 1$		$-$	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	$-$	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	10	$\searrow$	-98	$\nearrow$	

.

Exercice 5

Soit f la fonction qui a tout réel x associe le réel

1) $f'(x) = \frac{4x^3}{9} - 5$
2) $y = f'(a)(x - a) + f(a)$
3) $f(3) = \frac{3^4}{9} - 5 \times 3 = 9 - 15 = -6,$ $f'(3) = \frac{4\times3^3}{9} - 5 = 12 - 5 = 7$
   donc $y = 7(x - 3) - 6 \Leftrightarrow y = 7x - 21 - 6 \Leftrightarrow y = 7x - 27.$
4) $f(3{,}027) \approx 3{,}027 \times 7 - 27 = -5{,}81$
   $f(2{,}91) \approx 2{,}91 \times 7 - 27 = -6{,}63$

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
3		$+$		$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			10		-98		