Préparation aux contrôles du mois de Décembre

Programme de révision :

Partie 1 : les fonctions

Parité

Savoir dire si une fonction est paire, impaire ou aucun des deux

Périodicité

Savoir déterminer la période par lecture graphique

Savoir prouver qu'une fonction admet une période T par le calcul.

Taux de variation (calcul et interprétation)

Savoir prévoir le signe d'un taux de variation en fonction du sens de variation de la fonction

Savoir calculer le tau de variation entre deux abscisses.

Savoir interpréter le tau en question.

Dérivée en un point

Savoir passer du tau de variation à la dérivée

Savoir lire la dérivée en une abscisse d'une fonction donnée (voir tangente)

Savoir à quoi correspond la dérivée en une abscisse d'une fonction donnée

Tangente

Savoir lire la dérivée en une abscisse d'une fonction donnée (voir dérivée)

Connaitre la formule de l'équation de la tangente à la courbe en une abscisse donnée

Approximation

Savoir comment trouver l'approximation de l'image d'un réel par une fonction en exploitant la tangente de celle-ci.

Partie 2 : les probabilités conditionnelles

Savoir exploiter un tableau d'effectif

Pour en tirer un tableau de fréquences

Marginales

Conditionnelle par ligne

Conditionnelle par colonne

Interpréter ces tableaux pour répondre à des questions spécifiques

Pour faire des calculs de probabilités (connaitre la notation card(…))

Arbres

Savoir les compléter

Savoir les exploiter pour déterminer des probabilités

proba d'un chemin,

proba d'un évènement couvert par plusieurs chemins

indépendance

comprendre le sens de cette notion

savoir reconnaitre l'indépendance (avec la définition du cours ou sa reformulation)

savoir exploiter celle-ci pour faire des calculs

Sommaire

Sujets exercices type pour gérer des fonctions

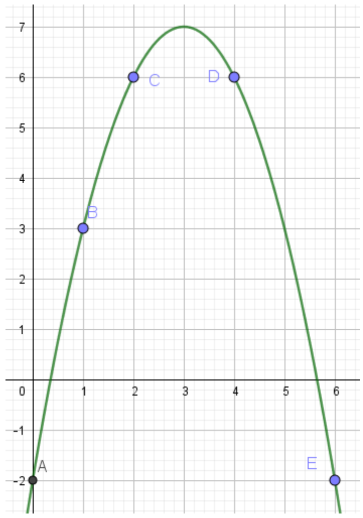
Exercice 1

Soit f, g, h et $j$trois fonctions qui associent à tout réel x respectivement : $f(x) = 5x^2 - 5$, $g(x) = 5x + 4$,
$h(x) = 5 + \cos(3\pi x)$ et $j(x) = 5\sin(2x) - x$

1) Etudier la parité des quatre fonctions
2) Montrer que la fonction h et de période $\frac{2}{3}$.
3) Utiliser votre calculatrice pour tracer la courbe de la fonction j et dire pourquoi on peut conjecturer qu'elle n'est pas périodique.

Exercice 2

Soit f la fonction qui a tout réel x associe le réel $f(x) = -x^2 + 6x - 2$



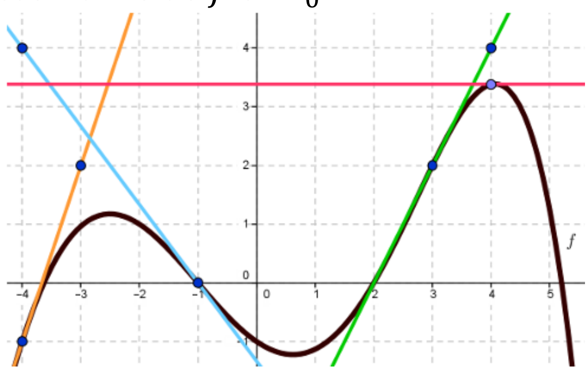
1) En considérant la représentation graphique de f ci-contre, donner les variations de la fonction (éventuellement faire un tableau)
2) A l'aide du tableau (seulement) prévoir le signe des taux de variation $\tau(1;0)$ et $\tau(4;6)$
3) Toujours avec le tableau seulement, peut-on prévoir le signe de $\tau(-1;8)$?
4) Calculer $\tau(1;2)$. Que représente ce taux pour la figure ?

Exercice 3

Soit f la fonction qui a tout réel x associe le réel $f(x) = 7 - 3x^2$

1) Déterminer le taux de variation $\tau(-1;-1+h)$
2) En déduire $f'(-1)$, puis dire à quoi correspond cette valeur pour la figure.
3) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x_0 = -1$

Exercice 4



1) En utilisant la courbe représentative de la fonction f , ci-contre déterminer $f(-4)$, $f'(-4)$, $f(-1)$, $f'(-1)$, $f(3)$, $f'(3)$et $f'(4)$
2) Donner les équations des tangentes à la courbe représentative de f en -1 et en 3.

Exercice 5

Sachant que la courbe de la fonction racine admet une tangente en $A(9;3)$ d'équation $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$

Sans utiliser la fonction racine de votre calculatrice donner des approximations de $\sqrt{9{,}03}$ et $\sqrt{8{,}997}$

Correction / méthode

Exercice 1

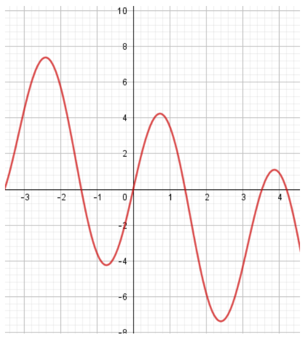
Soit f, g, h et j trois fonctions qui associent à tout réel x respectivement :
$f(x) = 5x^2 - 5$, $g(x) = 5x + 4$,
$h(x) = 5 + cos\,(3\pi x)$ *et* $j(x) = 5\,sin(2x) - x$

1) *Etudier la parité des quatre fonctions*

Pour étudier la parité d'une fonction f il faut calculer $f(-x)$ (l'image par celle-ci de $-x$) et comparer le résultat avec $f(x)$ (l'image de x par cette même fonction). Si on a exactement la même chose (c'est-à-dire $f(-x) = f(x)$) , alors la fonction est paire , si on a exactement l'opposé (c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$) , la fonction est impaire , si on n'a ni l'un ni l'autre alors la fonction est ni paire ni impaire.

$f(-x) = 5(-x)^2 - 5 = 5x^2 - 5 = f(x)$ donc f est paire.
$g(-x) = 5(-x) + 4 = -5x + 4$ or $-5x + 4 \neq g(x)$ et $-5x + 4 \neq -g(x)$ donc g est ni paire ni impaire.
$h(-x) = 5 + \cos\big(3\pi(-x)\big) = 5 + \cos(-3\pi x) = 5 + \cos(3\pi x)$ car $\cos(-a) = \cos\,(a)$ et donc $h(-x) = h(x)$ donc h est paire
$j(-x) = 5\sin\big(2(-x)\big) - (-x) = 5\sin(-2x) + x = -5\sin(2x)$ car $\sin(-a) = -\sin(a)$ et donc :
$j(-x) = -(5\sin(2x) - x) = -j(x)$ donc j est impaire.

2) *Montrer que la fonction h et $\frac{2}{3}$-périodique*



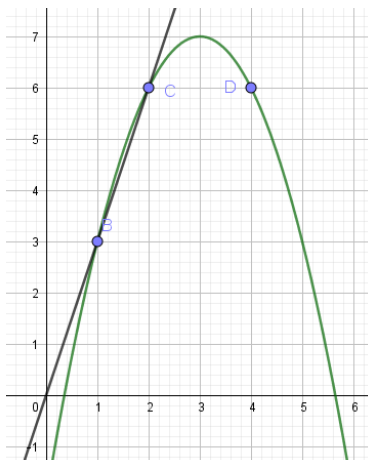
$h\left(x + \frac{2}{3}\right) = 5 + \cos\left(3\pi\left(x + \frac{2}{3}\right)\right) = 5 + \cos\left(3\pi x + 3\pi\frac{2}{3}\right) = 5 + \cos(3\pi x + 2\pi)$
$= 5 + \cos\,(3\pi x)$ car la fonction cos est 2π-périodique ainsi $h\left(x + \frac{2}{3}\right) = h(x)$ donc h et $\frac{2}{3}$-périodique.

3) *Utiliser votre calculatrice pour tracer la courbe de la fonction j et dire pourquoi on peut conjecturer qu'elle n'est pas périodique.*

On ne peut obtenir la courbe complète en prenant un motif et en le faisant glisser vers la gauche (ou la droite) encore et encore.

Exercice 2

Soit f la fonction qui a tout réel x associe le réel $f(x) = -x^2 + 6x - 2$.



1) *En considérant la représentation graphique de f ci-contre, donner les variations de la fonction (éventuellement faire un tableau)*

Croissante jusqu'à 3 (où l'on obtient un maximum valant 7) puis décroissante.

2) *A l'aide du tableau (seulement) prévoir le signe des taux de variation $\tau(1;0)$ et $\tau(4;6)$*

1 et 0 sont deux valeurs avant 3 donc sont deux valeurs sur un intervalle où la fonction est croissante donc le taux de variation sera nécessairement positif.
4 et 6 sont deux valeurs après 3 donc sont sur un intervalle où la fonction est décroissante donc le taux de variation sera nécessairement négatif.

3) *Toujours avec le tableau seulement, peut-on prévoir le signe de $\tau(-1;8)$?*

-1 et 8 ne sont pas sur un intervalle où la fonction est monotone (juste croissante ou juste décroissante) donc on ne peut se prononcer, pour déterminer le signe il nous faudra faire le calcul.

4) *Calculer $\tau(1;2)$. Que représente ce taux pour la figure ?*

$\tau(1;2) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{(-2^2+6\times2-2)-(-1^2+6\times1-2)}{1} = 6 - 3 = 3$

Ce taux représente le coefficient directeur de la droite passant par les points de la courbe d'abscisse 1 et 2, c'est donc le coefficient directeur de la droite (BC)

www.dimension-k.com

Exercice 3

Soit f la fonction qui a tout réel x associe le réel $f(x) = 7 - 3x^2$

1) *Déterminer le taux de variation $\tau(-1;-1+h)$*

$$\tau(-1;-1+h) = \frac{(7-3(-1+h)^2)-(7-3(-1)^2)}{(-1+h)-(-1)} = \frac{\left(7-3\left((-1)^2+2(-1)h+h^2\right)\right)-(7-3\times1)}{-1+h+1} = \frac{\left(7-3\left(1-2h+h^2\right)\right)-4}{h}$$
$$= \frac{(7-3+6h-3h^2)-4}{h} = \frac{4+6h-3h^2-4}{h} = \frac{6h-3h^2}{h} = \frac{h(6-3h)}{h} = 6-3h$$

2) *En déduire $f'(-1)$, puis dire à quoi correspond cette valeur pour la figure.*

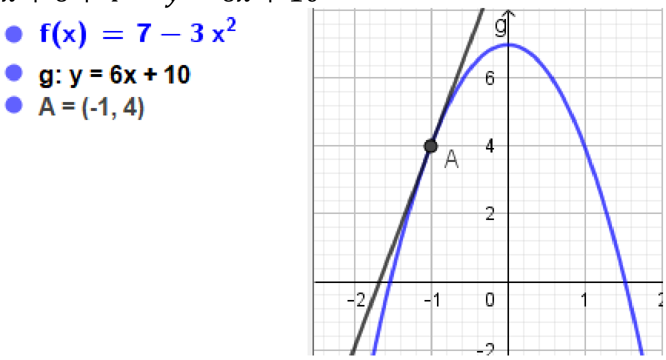
$f'(-1) = \lim\limits_{h\to0} 6-3h = 6$, c'est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse $x_0 = -1$

3) *Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x_0 = -1$*

Le cours nous dit que l'équation de la tangente à C_f en x_0 est $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

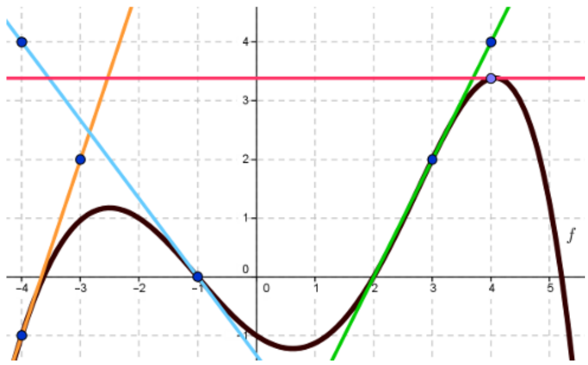
Donc ici comme $f'(-1) = 6$ et $f(-1) = 7-3(-1)^2 = 7-3 = 4$ on aura : $y = 6\big(x-(-1)\big)+4$

$\Leftrightarrow y = 6(x+1)+4 \Leftrightarrow y = 6x+6+4 \Leftrightarrow y = 6x+10$



Exercice 4

1) *En utilisant la courbe représentative de la fonction f , ci-contre déterminer $f(-4)$, $f'(-4)$, $f(-1)$, $f'(-1)$, $f(3)$, $f'(3)$et $f'(4)$*



Pour déterminer une dérivée en x_0 je regarde la tangente à la courbe au niveau du point de contact (qui a pour abscisse x_0) et une fois que j'ai repéré A et B deux points de cette droite je fait $f'(x_0) = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

$f(-4) = -1 \quad f'(x) = \frac{3}{1} = 3$

$f(-1) = 0$ et $f'(-1) = \frac{-4}{3}$

$f(3) = 2$ et $f'(3) = \frac{2}{1} = 2$

$f'(4) = 0$ car la tangente est horizontale

2) *Donner les équations des tangentes à la courbe représentative de f en -1 et en 3.*

Le cours nous dit que l'équation de la tangente à C_f en x_0 est $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

Tangente à C_f en $x_0 = -1$: $y = -\frac{4}{3}\big(x-(-1)\big)+0 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}(x+1) \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}$

Tangente à C_f en $x_0 = 3$: $y = 2(x-3)+2 \Leftrightarrow y = 2x-6+2 \Leftrightarrow y = 2x-4$

Exercice 5

Sachant que la courbe de la fonction racine admet une tangente en $A(9;3)$ d'équation $y = \frac{1}{6}x+\frac{3}{2}$

Sans utiliser la fonction racine de votre calculatrice donner des approximations de $\sqrt{9{,}03}$ et $\sqrt{8{,}997}$

On va utiliser l'approximation affine, c'est-à-dire qu'au lieu de chercher l'image de 9,03 et de 8,997 par la fonction racine on va chercher leur image en utilisant la tangente, en effet celle-ci est très proche de la courbe quand l'abscisse est proche de 9, elle nous donnera une approximation intéressante.

Avec $x = 9{,}03$ $\qquad y = \frac{1}{6}9{,}03+\frac{3}{2} = 1{,}505+1{,}5 = 3{,}05$ $\qquad$ ainsi $\sqrt{9{,}03} \approx 3{,}05$

Avec $x = 8{,}997$ $\qquad y = \frac{1}{6}8{,}997+\frac{3}{2} = 1{,}4995+1{,}5 = 2{,}9995$ $\qquad$ ainsi $\sqrt{8{,}997} \approx 2{,}9995$

www.dimension-k.com

Fiche pour préparer le contrôle sur les probabilités

La plupart des énoncés sont dans le livre

Exercice 13P134

D'après l'énoncé 70,7% d'une quantité à déterminer (on la notera x) représente 37 100 000

On a donc $\frac{70,7}{100}x = 37\ 100\ 000$ et donc $0,707x = 37\ 100\ 000$ donc $x = \frac{37\ 100\ 000}{0,707}$ donc $x \approx 52\ 475\ 247,52$

Le nombre total d'abonné est donc à peu près 52 475 248

Exercice 24P135

	Filles	Garçon	Total
Brevet (DNB)	339 651	321 490	661 141
CAP	77 658	102 475	180 133
BEP	62 324	65 183	127 507
Baccalauréat général	165 826	128 011	293 837
Baccalauréat technologique	65 658	59 463	125 121
Baccalauréat professionnel	76 293	114 606	190 899
Total	787 410	791 228	1 578 638

	Filles	Garçon	Total
Brevet (DNB)	22	20	42
CAP	5	6	11
BEP	4	4	8
Baccalauréat général	11	8	19
Baccalauréat technologique	4	4	8
Baccalauréat professionnel	5	7	12
Total	50	50	100

1. Pour le tableau des fréquences marginales on divise toutes les cases par le total des totaux (le nombre total de diplômes délivré en 2012) et on multiplie par 100. Par exemple pour avoir la proportion marginale de filles ayant obtenu le DNB on fait : 339 651 / 1 578 638 * 100

	Filles	Garçon	Total
Brevet (DNB)	51	49	100
CAP	43	57	100
BEP	49	51	100
Baccalauréat général	56	44	100
Baccalauréat technologique	52	48	100
Baccalauréat professionnel	40	60	100

2. Pour faire le tableau des fréquences conditionnelles par ligne, on divise chaque case par le total de la ligne. Par exemple pour connaitre la proportion de filles ayant obtenu le DNB parmi les élèves ayant obtenu le DNB on fait : 339 651 / 661 141* 100.

Bien sûr il n'y a pas de ligne de totaux

	Filles	Garçon
Brevet (DNB)	43	41
CAP	10	13
BEP	8	8
Baccalauréat général	21	16
Baccalauréat technologique	8	8
Baccalauréat professionnel	10	14
Total	100	100

3. Pour faire le tableau des fréquences conditionnelles par ligne, on divise chaque case par le total de la ligne. Par exemple pour connaitre la proportion de filles ayant obtenu le DNB parmi les filles on fait :
339 651 / 787 410 * 100.

4. Les garçons parmi les diplomés : 50%
Proportion d'élèves ayant obtenu leur brevet parmi les diplômés :42%
Proportion d'élèves ayant obtenu un bac parmi les diplômés : 19+8+12=39%
Proportion de filles ayant obtenu le brevet parmi les diplômés : 22%
Parmi les filles quel est le pourcentage de diplômés d'un baccalauréat général :21 %

www.dimension-k.com

Probabilités avec un tableau

L'exploitation du tableau est relativement intuitive, du moment qu'on comprend bien la question. Là c'est super clair car la question n'est pas posée en français mais à l'aide de symboles mathématiques.
La grosse difficulté d'interprétation est de ne pas confondre intersection et conditionnelle.
Pour ne pas se tromper l'astuce est simple : est-ce que je sais quelque chose ou pas au moment de calculer la probabilité ou pas ? si oui c'est une probabilité conditionnelle et l'évènement connu sera mis au pied de la lettre P (par exemple P_A) et l'évènement dont on cherche la probabilité sera noté dans la parenthèse, (par exemple : $P_A(B)$)
Il faut lire la question mais des fois aussi ce qui précède, car l'information contextualisant la demande peut être dans la phrase précédent la question (cf questions 4 et 5 de l'exercice 28P136).

Exercice 29P136

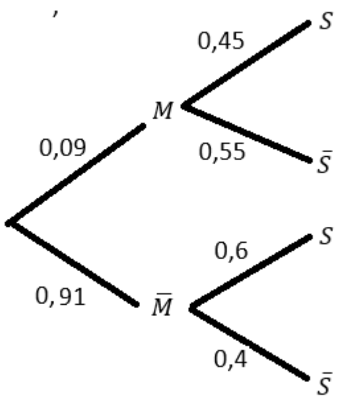
1. $P(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{402+591}{1500} = \frac{993}{1500} = 0{,}662$ (à titre de rappel : le cardinal d'un évènement est le nombre de cas positifs associés à cet évènement. Ω est l'univers des possibles, c'est-à-dire tous les cas possible, ainsi $card(\Omega)$ correspond à l'effectif total.
2. $P_C(S) = \frac{card(S\cap C)}{card(C)} = \frac{402}{402+591} = \frac{402}{993} \approx 0{,}405$ en effet parmi les (402+591 personnes faisant une activité culturelle, 402 font aussi une activité sportive)
3. $P(\bar{C} \cap S) = \frac{card(\bar{C}\cap S)}{card(\Omega)} = \frac{315}{1500} = 0{,}21$

Probabilités avec un arbre

Souvent il faut remplir l'arbre avant de l'exploiter.
La plupart du temps on reporte les valeurs de l'énoncé, puis on utilise le fait que la somme des probabilités partant d'un même point fait 1.
Il faudra faire attention à bien décoder l'information. Il est tout à fait possible qu'on vous donne une valeur qui ne va pas rentrer dans l'arbre comme la probabilité d'une intersection et c'est à vous de faire le calcul pour déterminer la probabilité conditionnelle
L'exploitation s'appuie sur deux principes :

- *La probabilité d'une intersection de plusieurs évènements, autrement dit la probabilité d'un chemin passant par les évènements en question, se fait en multipliant les probabilités des branches formant le chemin.*
- *La probabilité d'un évènement obtenable à travers plusieurs chemins : il faut faire la somme des probabilités des chemins en question.*

Attention : au niveau des calculs les exercices sont très simples, du coup on vous attend beaucoup sur votre rédaction. Pas nécessairement avec des phrases, mais au moins, avant d'écrire vos produits et vos sommes de probabilité vous marquiez celles-ci avec les lettres (cf question 2 de l'exercice 62P143, ci-dessous)



Exercice 62P143 (variante : au lieu de faire le tableau des fréquences marginales, on fera un arbre)

1. $P(M) = 0{,}09$ et $P_M(S) = 0{,}45$
2. $P(S) = P(M \cap S) + P(\bar{M} \cap S) = P(M)P_M(S) + P(\bar{M})P_{\bar{M}}(S)$
   $= 0{,}09 \times 0{,}45 + 0{,}91 \times 0{,}6 = 0{,}5865 \approx 0{,}59$
3. $P_S(M) = \frac{P(M\cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}09\times 0{,}45}{0{,}5865} = \frac{0{,}0405}{0{,}5865} = \frac{8}{115} \approx 0{,}0696 \approx 7\%$
4. $P_{\bar{S}}(M) = \frac{P(M\cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{0{,}09\times 0{,}55}{1-0{,}5865} = \frac{0{,}0495}{0{,}4135} = \frac{99}{827} \approx 0{,}1197 \approx 0{,}12$
5. Baissons de 30% la probabilité d'avoir une maladie vasculaire sachant que l'on n'a pas d'activité physique $\left(1 - \frac{30}{100}\right) P_S(M) = 0{,}7 \times \frac{99}{827} = \frac{693}{8270} \approx$ $0{,}0838 \approx 8\%$ c'est un peu supérieur au 7% correspondant à la probabilité d'avoir une maladie alors que l'on fait du sport donc on ne baisse pas exactement la fréquence de 30% on baisse d'un peu plus
   Approche alternative :
   Faire de l'activité physique permet de passer d'une probabilité d'avoir une maladie d'environ 0,1197 à 0,0696, il s'agit d'une baisse de t% et donc on a :
   $0{,}1197\left(1 - \frac{t}{100}\right) = 0{,}0696 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{t}{100}\right) = \frac{0{,}0696}{0{,}1197} \Leftrightarrow 1 - \frac{0{,}0696}{0{,}1197} = \frac{t}{100} \Leftrightarrow 100\left(1 - \frac{0{,}0696}{0{,}1197}\right) = t$

On a donc un pourcentage de baisse de $t \approx 42$ c'est bien plus que les 30% annoncé

Indépendance (la prouver / l'exploiter)

la prouver

Une agence de tourisme propose 1000 tickets à gratter, tous gagnants. 990 d'entre eux font gagner une paire de lunettes de soleil et 10 font gagner un voyage, soit en Asie, soit en Afrique.
Les tickets sont de couleur rose ou bleue.
Le tableau ci-dessous donne la répartition des tickets :

gain / série	lunette de soleil	voyage en asie	voyage en afrique	Total
tickets roses	594	4	2	600
tickets bleus	396	1	3	400
Total	990	5	5	1000

Un client reçoit au hasard un des 1000 tickets. On considère les évènements R : ”Le ticket reçu est rose” et V : ”Le client gagne un voyage”.

1. (a) Calculer $P(V)$, $P_R(V)$ et $P_{\bar{R}}(V)$.
(b) La probabilité de gagner un voyage dépend-elle de la couleur du ticket reçu ?
(c) Calculer $P(R)$, vérifier que $P(V \cap R) = P(V) \times P(R)$. Que peut-on en déduire

2. On note A l'évènement ”Le client gagne un voyage en Asie”.
(a) Calculer $P(A)$, $P_R(A)$, et $P_{\bar{R}}(A)$.
(b) La probabilité de gagner un voyage en Asie dépend-elle de la couleur du ticket reçu ?
(c) Vérifier que $P(A \cap R) \neq P(A) \times P(R)$.

Solution

1. a) $P(V) = \frac{10}{1000} = 0{,}01$ $\quad P_R(V) = \frac{P(R \cap V)}{P(R)} = \frac{\frac{6}{1000}}{\frac{600}{1000}} = 0{,}01$ $\quad P_{\bar{R}}(V) = \frac{P(\bar{R} \cap V)}{P(\bar{R})} = \frac{\frac{4}{1000}}{\frac{400}{1000}} = 0{,}01$

Contrairement à l'exercice 29 j'ai choisi de ne pas passer par les cardinaux (pluriel de cardinal (card)).
b) Sachant que le ticket est rose ou qu'il est bleu, la probabilité de gagner un voyage reste la même que si l'on ne connaît pas la couleur du ticket. La probabilité de gagner un voyage semble ne pas dépendre de la couleur du ticket reçu. D'après la remarque dans le cours ça prouve que R et V sont indépendants
c) $P(R) = \frac{600}{1000} = 0{,}6$; $P(V \cap R) = \frac{6}{1000} = 0{,}006$ (d'après le tableau)
$P(V) \times P(R) = 0{,}01 \times 0{,}6 = 0{,}006 = P(R \cap V)$ Par définition ça prouve de nouveau que R et V sont indépendants.

2. a) $P(A) = \frac{5}{1000} = 0{,}005$ $\quad P_R(A) = \frac{P(R \cap A)}{P(R)} = \frac{\frac{4}{1000}}{\frac{600}{1000}} = \frac{1}{150} \approx 0{,}0067$ $\quad P_{\bar{R}}(A) = \frac{P(\bar{R} \cap A)}{P(\bar{R})} = \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{400}{1000}} = \frac{1}{400} = 0{,}0025$

b) La probabilité de gagner un voyage en Asie n'est pas la même que la probabilité de gagner un voyage en Asie sachant que le ticket est rose ou sachant que le ticket est bleu. Il semble donc que la probabilité de gagner un voyage en Asie dépende de la couleur du ticket reçu. A et R ne sont pas indépendants.
c) $P(A \cap R) = \frac{4}{1000} = 0{,}004$ et $P(A) \times P(R) = 0{,}005 \times 0{,}6 = 0{,}003 \neq P(A \cap R)$, ça confirme l'interprétation de la question précédente.

L'exploiter

Exemple : Soit A et B deux évènements indépendants tels que $P(A) = 0{,}3$ et $P(B) = 0{,}45$.
Déterminer $P_A(B)$, $P(A \cap B)$ et $P_{\bar{B}}(A)$

Solution

$P_A(B)$: comme A et B sont indépendants, la probabilité de B n'est pas changée par le fait qu'on sache A, $P_A(B) = P(B) = 0{,}45$
$P(A \cap B)$: par définition de deux évènements indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0{,}3 \times 0{,}45 = 0{,}135$
$P_{\bar{B}}(A)$ comme A et B sont indépendants, A et $\bar{B}$ sont aussi indépendants et donc :
$P_{\bar{B}}(A) = P(\bar{B})P(A) = \left(1 - P(B)\right)P(A) = (1 - 0{,}3)0{,}45 = 0{,}315$