Fiche méthode :

Résolution d'équation trigonométrique

1) Base

$$\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

On commence par regarder la valeur de droite, on oublie son signe, et on cherche un angle connu ayant le même cosinus. Ici c'est $\frac{\pi}{6}$

Ici j'ai tout de même un problème de signe, je veux avoir une parfaite égalité entre les cosinus des deux membres. Comme $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$

Attention pour une équation en sinus on utilisera :

$$\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

2) Dans un intervalle donné

Si on se propose de résoudre $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ non plus sur $\mathbb{R}$ mais sur $[0; 3\pi]$

Comme mes angles vont être en sixième, je convertis mon intervalle $[0; 3\pi] = \left[0; \frac{18\pi}{6}\right]$

$$\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Je pars de l'angle connu dans mon accolade et je lui rajoute ou lui retranche des tours $2\pi = \frac{12\pi}{6}$

$\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ correspond à …; $\frac{-17\pi}{6}$; $\frac{-5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{19\pi}{6}$; $\frac{31\pi}{6}$;….

$\frac{-7\pi}{6} + 2k\pi$ correspond à …; $\frac{-31\pi}{6}$; $\frac{-19\pi}{6}$; $\frac{-7\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$; $\frac{29\pi}{6}$;….

J'encadre dans les deux listes les angles dans le bon intervalle.

Ainsi $S = \left\{\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right\}$

Il ne me reste plus qu'à récapituler

3) De la forme $\cos(X) = \cos(a)$ ou $\sin(X) = \sin(a)$ avec X une expression dépendant de x

Résolution de $\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

On résout l'équation comme si l'expression compliqué dans le sinus était un X

$\Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

Arrivé à cette étape il nous faut résoudre les inéquations des deux lignes

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ 3x - \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ ou \\ 3x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ x3 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = (\frac{7\pi}{4} + 2k\pi) \div 3 \\ ou \\ x = \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \div 3 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \\ ou \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

C'est basique il faut juste faire attention de bien tout diviser dans les deux membres par 3.

4) inéquations

Pour résoudre une inéquation trigonométrique de la forme $\cos(x) \geq s$ ou $\cos(x) \leq s$ je dois d'abord résoudre $\cos(x) = s$, représenter graphiquement les solutions (deux points alignés sur une verticale d'équation $x = s$) puis je repasse en couleur la partie du cercle située à droites ou à gauche de la verticale. A gauche on aura des valeurs plus petites que s et à droite des valeurs plus grandes que s

Pour résoudre une inéquation trigonométrique de la forme $\sin(x) \geq s$ ou $\sin(x) \leq s$ je dois d'abord résoudre $\sin(x) = s$, représenter graphiquement les solutions (deux points alignés sur une horizontale d'équation $y = s$) puis je repasse en couleur la partie du cercle située au-dessus ou en dessous de l'horizontale. En dessous on aura des valeurs plus petites que s et au-dessus des valeurs plus grandes que s.