www.dimension-k.com

Correction du Devoir maison :
dérivées de fonctions & trigonométrie

Exercice 100 P 115

1) $AB = A'B' - x - x = 24 - 2x$

ABCD étant un carré dans un carré plus grand A'B'C'D' il aura ses quatre côtés qui vont mesurer $24 - 2x$

2)a) $\mathcal{A}_{ABCD} = (24-2x)^2 = 576 - 96x + 4x^2$

b) on sait que cette boite a pour fond le carré de côté AB et que sa profondeur sera de x

$\mathcal{V}(x) = (24-2x)^2 x = 4x^3 - 96x^2 + 576x$

3) $\mathcal{V}'(x) = 12x^2 - 192x + 576$

$\Delta = (-192)^2 - 4 \times 12 \times 576 = 9216$

$x_1 = \frac{192-\sqrt{9216}}{24} = 4$ et $x_2 = \frac{192+\sqrt{9216}}{24}$

Donc $\mathcal{V}'$ est négative entre ces deux racines et positive en dehors, si l'on considère l'intervalle $[0;12]$ elle sera positive de 0 à 4 puis négative jusqu'à 12 , ainsi $\mathcal{V}$ sera croissante jusqu'à x_1 puis décroissante.

4)Le volume maximal sera donc $\mathcal{V}(4) = (24 - 2\times 4)^2 4 = 1024cm^3$

Exercice 48P152

1)a) Dans le triangle OAM rectangle en O on a : $\tan\alpha = \frac{opp}{adj} = \frac{OA}{AM} = \frac{37{,}3}{x}$

Dans le triangle OBM rectangle en O on a : $\tan\beta = \frac{opp}{adj} = \frac{OB}{AM} = \frac{37{,}3+5{,}6}{x} = \frac{42{,}9}{x}$

b) $\tan\theta = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{42{,}9}{x}-\frac{37{,}3}{x}}{1+\frac{37{,}3}{x}\frac{42{,}9}{x}} = \frac{\frac{42{,}9-37{,}3}{x}}{1+\frac{37{,}3\times 42{,}9}{x^2}} = \frac{5{,}6x}{x^2+1600{,}17}$

2)a) On a définit f sur $[0{,}100]$ par $f(x) = \frac{5{,}6x}{x^2+1600{,}17}$ je reconnais $\frac{u}{v} \to \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u(x) = 5{,}6x$, $v(x) = x^2 + 1600{,}17$ et $u'(x) = 5{,}6$ et $v'(x) = 2x$ ainsi :

$f'(x) = \frac{5{,}6(x^2+1600{,}17)-5{,}6x2x}{(x^2+1600{,}17)^2} = \frac{8960{,}952-5{,}6x^2}{(x^2+1600{,}17)^2}$

f'sera du signe de $8960{,}952 - 5{,}6x^2$ $\Delta = 0 - 4(-5{,}6)8960{,}952 = 200\,725{,}3248$

$x_1 = \frac{-\sqrt{200\,725{,}3248}}{2\times(-5{,}6)} \approx 40{,}00$ et $x_2 = \frac{\sqrt{200\,725{,}3248}}{2\times(-5{,}6)} \approx -40{,}00$

f' sera donc négative sur $[0;40]$ puis positive jusqu'à 100 donc f sera décroissante jusqu'à son minimum $f(x_1) \approx 0{,}07$ en $x_1 \approx 40$

Le joueur doit se mettre à 40m du bord pour avoir l'angle le plus important

Exercice 49P152

On chercher une fonction trinôme f donc $f(x) = ax^2 + bx + c$ qui vérifie trois conditions :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(125) = 25 \\ f(-125) = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a0^2 + b0 + c = 0 \\ a125^2 + b125 + c = 25 \\ a(-125)^2 + b(-125) + c = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a125^2 + b125 = 25 \\ a(-125)^2 + b(-125) = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a125^2 + b125 = 25 \\ a2(125)^2 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a125^2 + b125 = 25 \\ a2(125)^2 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a125^2 + b125 = 25 \\ a = \frac{1}{625} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 25 + b125 = 25 \\ a = \frac{1}{625} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = \frac{1}{625} \end{cases} \text{ donc } f(x) = \frac{1}{625}x^2$$

2a) $f'(x) = \frac{1}{625}2x = \frac{2x}{625}$ donc $f'(125) = \frac{2\times 125}{625} = 0{,}4$

On vient de voir que $f'(125)$ donc la tangente à la courbe au point d'abscisse 125 a un coefficient directeur de 0,4

Ainsi $\tan\alpha = 0{,}4$ et donc d'après notre calculatrice $\alpha = \tan^{-1} 0{,}4 \approx 21{,}80°$

De plus on sait que l'angle du câble avec le pilier est de $\theta = 90 - \alpha \approx 68{,}20°$