Devoir surveillé n°5 (version A)

Exercice 1 Donner la mesure principale de chacun des angles suivants :

$\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{17\pi}{4}$, $\frac{153\pi}{7}$

Exercice 2 Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

$\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Exercice 3 Dériver les fonctions suivantes :

$f(x) = 3\cos x - 2\sin x$ $g(x) = x\sin x$ $h(x) = \frac{\cos x}{x^2+1}$

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

1) Donner la dérivée de f
2) Vocabulaire : à quoi correspondent les deux paramètres 3 et $\frac{\pi}{2}$ dans la fonction f.
3) Donner la plus petite période possible de f, donner d'autres périodes possibles.
4) Si on devait comparer la courbe de f et celle de $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, visuellement quel est l'impact du 3. (Vous pouvez faire un dessin si vous avez du mal à vous exprimer.)
5) Si on devait comparer la courbe de f et celle de $\cos(3x)$, visuellement quel est l'impact du $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 5 Donner module et argument des complexes suivants :

$z_A = -3 - i\sqrt{3}$ $z_B = -5i$

Exercice 6 Déterminer les valeurs des expressions suivantes :

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right)$

Devoir surveillé n°5 (version B)

Exercice 1 Donner la mesure principale de chacun des angles suivants :

$\frac{-3\pi}{2}$, $\frac{17\pi}{4}$, $\frac{-153\pi}{7}$

Exercice 2 Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

$\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Exercice 3 Dériver les fonctions suivantes :

$f(x) = 3\cos x + 7\sin x$ $g(x) = x^2\sin x$ $h(x) = \frac{\sin x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

1) Donner la dérivée de f
2) Vocabulaire : à quoi correspondent les deux paramètres 2 et $\frac{\pi}{3}$ dans la fonction f.
3) Donner la plus petite période possible de f, donner d'autres périodes possibles.
4) Si on devait comparer la courbe de f et celle de $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, visuellement quel est l'impact du 2. (Vous pouvez faire un dessin si vous avez du mal à vous exprimer.)
5) Si on devait comparer la courbe de f et celle de $\sin(2x)$, visuellement quel est l'impact du $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 5 Donner module et argument des complexes suivants :

$z_A = -\sqrt{3} - i3$ $z_B = -5$

Exercice 6 Déterminer les valeurs des expressions suivantes :

$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$, $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et $\cos\left(\frac{9\pi}{2}\right)$

Points de détail du Devoir surveillé n°5

Exercice 1

Mesure principale de $\frac{3\pi}{2}$: $\frac{3\pi}{2}$ est trop grande pour être dans $]\pi;\pi]$ donc on peut tenter de lui retirer un tour : $\frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$, cette valeur est dans l'intervalle donc on peut dire que $-\frac{\pi}{2}$ est la mesure principale de $\frac{3\pi}{2}$

Mesure principale de $\frac{-153\pi}{7}$: cette mesure est visiblement vraiment trop petite $\frac{\pi}{7}$, il va falloir rajouter plus d'un tour… pour savoir combien je procède à la division : $\frac{\frac{-153\pi}{7}}{2\pi} = \frac{-153}{14} \approx -11$

Remarque : je fais attention de mettre les 2π entre parenthèse, si je veux utiliser la division initiale avec ma calculatrice sans simplifier.

$\frac{-153\pi}{7} + 11 \times 2\pi = \frac{-153\pi}{7} + \frac{154\pi}{7} = \frac{\pi}{7}$, ici $\frac{\pi}{7}$ est notre mesure principale

Exercice 2

$\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et

$\Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - (-\frac{\pi}{3}) + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ 3x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ 3x = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ 3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

$\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ 3x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ 3x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \\ ou \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

Exercice 3 Dériver les fonctions suivantes :

A $f(x) = 3\cos x - 2\sin x$

Là il fallait utiliser <u>de tête</u> les formules de dérivées de $\cos x$, $\sin x$, ku et $u + v$, que l'on doit connaitre par cœur : on pouvait directement écrire :

$f'(x) = -3\sin x - 2\cos x$

$g(x) = x\sin x$ Je reconnais $(uv)' = u'v + u\,v'$

Avec $u = x$ et $v = \sin x$ donc $u' = 1$ et $v' = \cos x$

$g'(x) = 1\sin x + x\cos x$

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par **A :** $\boldsymbol{f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)}$

On reconnait $\cos(\omega x + \varphi) \to -\omega\sin(\omega x + \varphi)$ donc $f'(x) = -3\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$,

La plus petite période est $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$ on peut avoir aussi n'importe quel multiple de $\frac{2\pi}{3}$ et donc par exemple $2\frac{2\pi}{3}$ et $4\frac{2\pi}{3}$.

La pulsation vaut 3 donc la courbe bât 3 fois plus rapidement, la sinusoïde sera donc trois fois plus serrée.

rends les oscillations 3 fois plus rapides

$\frac{\pi}{2}$ est l'avance de la courbe, elle se retrouve décalée $\frac{\pi}{2}$ sur la gauche

Exercice 5 et 6 (voir correction de l'interrogation)

Correction expresse du Devoir surveillé n°5

Exercice 1

Mesure principale de $\frac{3\pi}{2}$: $\frac{-\pi}{2}$,

Mesure principale de $-\frac{17\pi}{4}$: , $-\frac{\pi}{4}$

Mesure principale de $\frac{153\pi}{7}$: $\frac{-\pi}{7}$

Mesure principale de $\frac{-3\pi}{2}$: $\frac{\pi}{2}$

Mesure principale de $\frac{17\pi}{4}$: $\frac{\pi}{4}$

Mesure principale de $\frac{-153\pi}{7}$: $\frac{\pi}{7}$

Exercice 2 Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

$\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et

$\Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - (-\frac{\pi}{3}) + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

$\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

$\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ 3x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ 3x = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ 3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$

$\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ 3x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ 3x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \\ ou \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$

Exercice 3 Dériver les fonctions suivantes :

A $f(x) = 3\cos x - 2\sin x$ $\quad f'(x) = -3\sin x - 2\cos x$

$g(x) = x\sin x$ $\quad g'(x) = 1\sin x + x\cos x$

$h(x) = \frac{\cos x}{x^2+1}$ $\quad h'(x) = \frac{-\sin x\,(x^2+1) - (\cos x)\,2x}{x^2+1}$

B $f(x) = 3\sin x - 2\cos x$ $\quad f'(x) = 3\cos x + 2\sin x$

$g(x) = x\cos x$ $\quad g'(x) = 1\cos x - x\sin x$

$h(x) = \frac{\sin x}{x}$ $\quad h'(x) = \frac{\cos x\,(x) - (-\sin x)\,1}{x^2+1}$

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par **A :** $\boldsymbol{f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)}$

$f'(x) = -3\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$, 3 est la pulsation et $\frac{\pi}{2}$ le déphasage

La plus petite période est $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$ on peut avoir aussi $2\frac{2\pi}{3}$ et $4\frac{2\pi}{3}$

Le 3 rends les oscillations 3 fois plus rapides

$\frac{\pi}{2}$ provoque un décalage de $\frac{\pi}{2}$ sur la gauche de la courbe de f par rapport à m'autre

B : $\boldsymbol{f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}$

$f'(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 2 est la pulsation et $\frac{\pi}{3}$ le déphasage

La plus petite période est $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ on peut avoir aussi 2π et 4π

Le 2 rends les oscillations 2 fois plus rapides

$\frac{\pi}{3}$ provoque un décalage de $\frac{\pi}{3}$ sur la gauche de la courbe de f par rapport à l'autre

Exercice 5 Donner module et argument des complexes suivants :

$z_A = -3 - i\sqrt{3} = \left[6; \frac{4\pi}{3}\right]$ $\quad z_A = -\sqrt{3} - i3 = \left[6; \frac{7\pi}{6}\right]$

$z_B = -5i = \left[5; \frac{-\pi}{2}\right]$ $\quad z_B = -5 = [5; \pi]$

Exercice 6 Déterminer les valeurs des expressions suivantes :

A : $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, $\quad \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) = 1$

B : $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\left(\frac{9\pi}{2}\right) = 0$