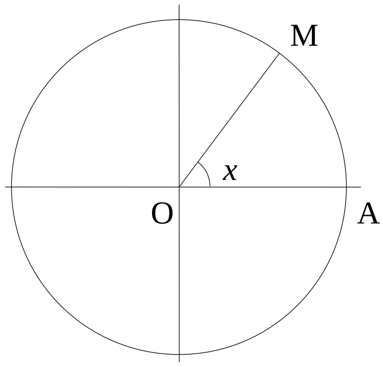
Fonctions circulaires

I. Le cercle trigonométrique

Définition.
Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on choisit une orientation : le sens direct ou sens inverse des aiguilles d'une montre.



Remarque.
Dans le cercle trigonométrique de centre O, on considère l'angle $\widehat{AOM} = x$ en degré. L'arc de cercle $\overset{\frown}{AM}$ de centre O a une longueur l qui proportionnel à x.

Angle en degré	360	x
Longueur l	2π	l

est

donc $l = \frac{2\pi\times x}{360} = \frac{2\pi}{360}\times x$

Définition.
l est appelée la mesure en **radian** de l'angle $\widehat{AOM}$

Propriété.
Les mesures en degré et en radian de l'angle $\widehat{AOM}$ sont proportionnelles.
En utilisant la relation de la remarque précédente on obtient :

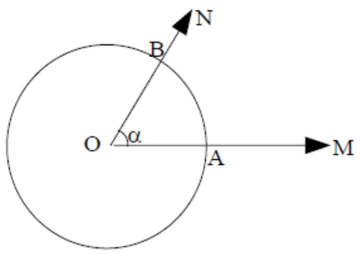
Angle en degré	0	30°	45°	60°	90°	180°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Remarques.
- Chaque point M du cercle est repéré par un nombre qui n'est pas unique, ce nombre correspond à la mesure en radian de l'angle formé par l'axe des abscisses et [OM].
- **2π représente un tour complet** dans le sens direct, -2π un tour complet dans le sens indirect.

$2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$, représente k tours complets, si $k>0$, dans le sens direct et si $k<0$, dans le sens indirect.

II. angles orientés

1. Mesures
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Le couple $(\vec{u},\vec{v})$ forme un angle orienté.



Soient O, M et N trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{ON}$
Soit C le cercle trigonométrique. La demi-droite $[OM)$ coupe C en A. La demi-droite $[ON)$ coupe C en B.
On obtient une mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$, en calculant la longueur parcourue sur le cercle pour aller de A à B et en lui donnant un signe représentant le sens de parcours.

Si la mesure en radians de $\widehat{AOB}$ est a, les mesures de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ sont de la forme $a + 2k\pi$ ou $-a + 2k\pi$ selon le sens de parcours pour aller de A à B, k étant un entier relatif.

Exemple

OAB est un triangle équilatéral direct. La mesure de $\widehat{AOB}$ en radians est donc $\frac{\pi}{3}$.

L'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ a comme mesures possibles : ...., $\frac{\pi}{3} - 2\pi = \frac{-5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$, ...

L'angle orienté $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$ a comme mesures possibles :..., $-\frac{\pi}{3} - 2\pi = \frac{-7\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$, ...

2. Mesure principale d'un angle orienté

Parmi toutes les mesures d'un angle orienté, une seule se trouve dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ elle est appelée mesure principale de l'angle orienté.

Si a est la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, alors |a| est la mesure en radian de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.

Exemple

Trouver la mesure principale d'un angle dont l'une des mesures est $\frac{11\pi}{3}$

Comme $\frac{11\pi}{3} > \pi$, on retire des multiples de 2π jusqu'à obtenir un résultat contenu dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

$\frac{11\pi}{3} - 2\pi = \frac{5\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3} - 2\pi = \frac{-\pi}{3}$, comme $\frac{-\pi}{3} \in]-\pi;\pi]$ il s’agit de la mesure principale de l’angle.

III. propriétés des fonctions cosinus et sinus

En regardant les courbes des fonctions cosinus et sinus on peut conjecturer un certains nombres de propriétés qui seront admises cette année.

Propriété

La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.

Ça signifie que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ et $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ ou encore que la courbe du cosinus est symétrique par rapport à l’axe des ordonnées et celle des sinus est symétrique par rapport à l’origine.

Propriété : Périodicité

Les fonctions cosinus et sinus son 2π-périodique.

Ceci veut dire que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

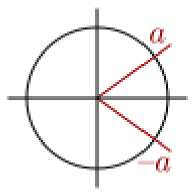
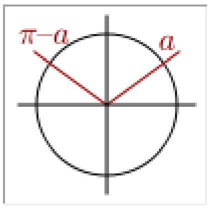
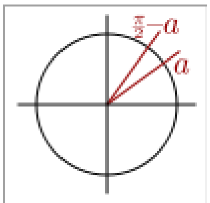
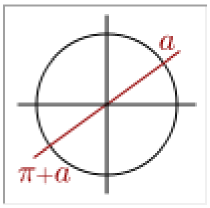
Les fonctions associant à tout réel t les valeurs $\cos(\omega t + \varphi)$ et $\sin(\omega t + \varphi)$ sont $\frac{2\pi}{\omega} - périodiques$.

Remarque

ω est généralement appelée la vitesse angulaire et φ le déphasage.

Propriétés des arcs associés

On les montre aisément, à l'aide de symétries.

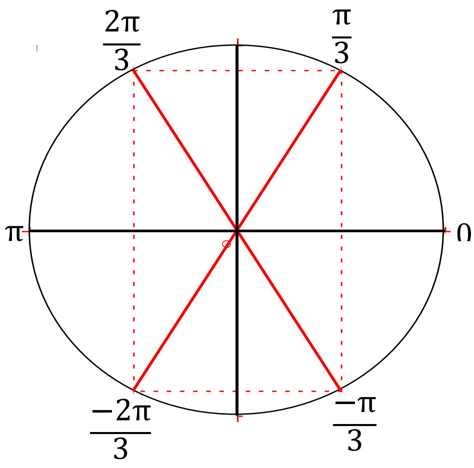
$\cos(-a) = \cos(a)$ $\sin(-a) = -\sin(a)$		$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$ $\sin(\pi - a) = \sin(a)$	
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$		$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$ $\sin(\pi + a) = -\sin(a)$	

Méthode.

En considérant le dénominateur on determine l'angle fondamental en rapport, puis on regarde quelle est la symétrie utilisée .

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\quad \cos\frac{-\pi}{3} = \frac{1}{2}$ mais $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ $\quad \cos\frac{-2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

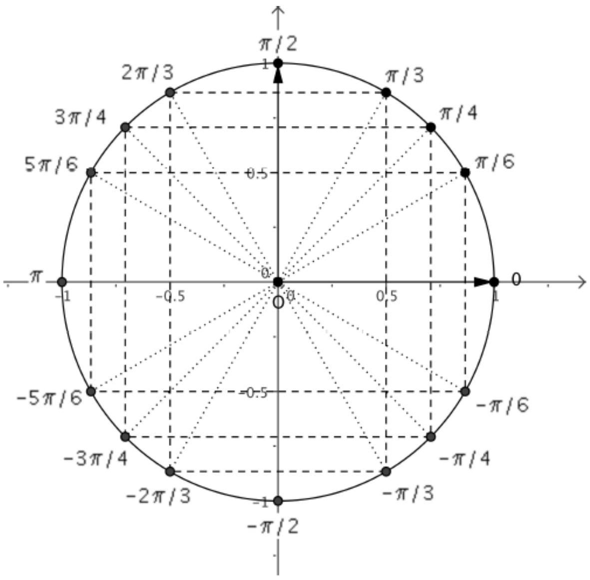
$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ mais $\sin\frac{-\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin\frac{-2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



Exemples.

▶ 1. Déterminer $\cos\frac{5\pi}{6}$, $\sin\frac{-3\pi}{4}$, $\sin\frac{3\pi}{2}$ et $\cos\frac{-\pi}{6}$ en illustrant avec un dessin.

$\cos\frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{-3\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$ et $\cos\frac{-\pi}{6} = \frac{1}{2}$.



▶ 2. Soit $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ tel que $\cos x = \frac{2}{3}$. Déterminer $\sin x$ et $\tan x$.

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\frac{4}{9} + \sin^2 x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x = \frac{5}{9}$

$\Leftrightarrow \quad \sin x = \sqrt{\frac{5}{9}}$ ou $\sin x = -\sqrt{\frac{5}{9}}$.

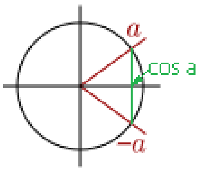
Ici on a $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ donc on est dans les cadrans 3 et 4 et donc le sinus est nécessairement négatif et donc

$\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, de plus $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

Equations trigonométriques

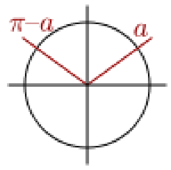
Propriété :

$$\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ ou \\ x = -a + 2k\pi \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$



Et

$$\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$



Exemple :

Résoudre $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ on sait que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ donc on veut résoudre $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ 2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ 2x = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

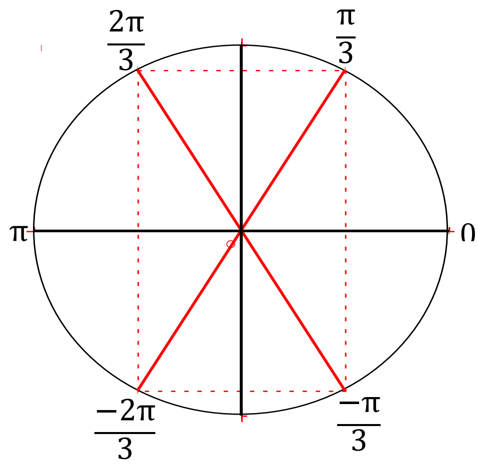
Résoudre $\sin\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ on sait que $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ on veut donc résoudre $\sin\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + \frac{\pi}{6} = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ -x + \frac{\pi}{6} = \pi - (-\frac{\pi}{3}) + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = \frac{-\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ -x = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ -x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} - 2k\pi \\ ou \\ x = \frac{-7\pi}{6} - 2k\pi \end{cases}$$

Méthode.
En considérant le dénominateur on determine l'angle fondamental en rapport, puis on regarde quelle est la symétrie utilisée .

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\quad\cos\frac{-\pi}{3} = \frac{1}{2}$ mais $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ $\quad\cos\frac{-2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

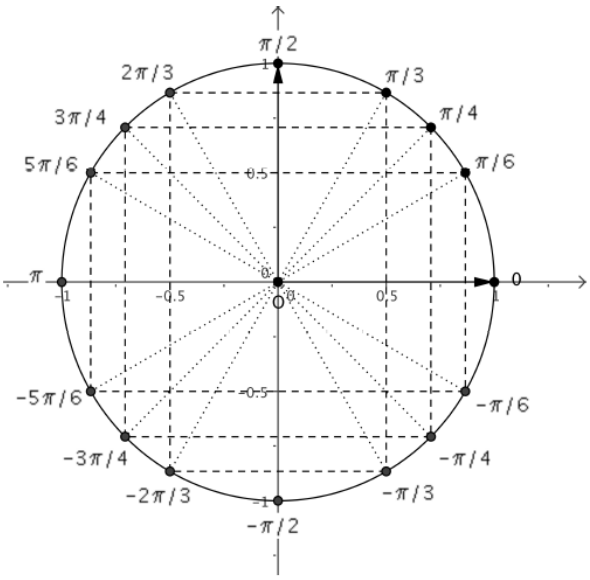
$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ mais $\sin\frac{-\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\sin\frac{-2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



Exemples.

▶ 1. Déterminer $\cos\frac{5\pi}{6}$, $\sin\frac{-3\pi}{4}$, $\sin\frac{3\pi}{2}$ et $\cos\frac{-\pi}{6}$ en illustrant avec un dessin.

$\cos\frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{-3\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$ et $\cos\frac{-\pi}{6} = \frac{1}{2}$.



▶ 2. Soit $x \in \left[\frac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$ tel que $\cos x = \frac{2}{3}$. Déterminer $\sin x$ et $\tan x$.

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\frac{4}{9} + \sin^2 x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x = \frac{5}{9}$

$\Leftrightarrow \quad \sin x = \sqrt{\frac{5}{9}}$ ou $\sin x = -\sqrt{\frac{5}{9}}$.

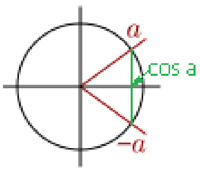
Ici on a $x \in \left[\frac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$ donc on est dans les cadrans 3 et 4 et donc le sinus est nécessairement négatif et donc

$\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, de plus $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

Equations trigonométriques

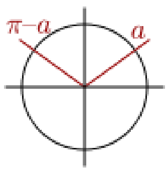
Propriété :

$$\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ ou \\ x = -a + 2k\pi \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$



Et

$$\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$



Exemple :

Résoudre $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ on sait que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ donc on veut résoudre $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ 2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ 2x = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

Résoudre $\sin\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ on sait que $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ on veut donc résoudre $\sin\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + \frac{\pi}{6} = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ -x + \frac{\pi}{6} = \pi - (-\frac{\pi}{3}) + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = \frac{-\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ -x = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ -x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} - 2k\pi \\ ou \\ x = \frac{-7\pi}{6} - 2k\pi \end{cases}$$