Chapitre 2 – Etude de fonctions

I. La valeur absolue :

Définition :

La valeur absolue d'un nombre réel x est lenombre réel noté $|x|$ égal à :

$$|x| = \begin{cases} x \; si \; x \geq 0, \\ -x \; si \; x \leq 0. \end{cases}$$

La fonction valeur absolue est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x|$

Représentation graphique et variations de la fonction valeur absolue :

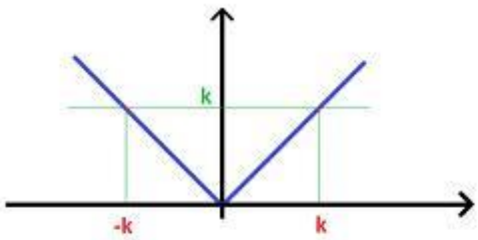
la méthode la plus générale : **chercher le signe de $u_{n+1} - u_n$.**

Exemple 1 : étudier le sens de variation de la suite : pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 - 3n - 1$.

La fonction vaut –x sur $\mathbb{R}^-$ elle est donc décroissante sur cet intervalle et elle vaut x sur $\mathbb{R}^+$ donc elle sera croissante sur cet intervalle.

On aura donc le tableau de variation ci-dessous : et la représentation graphique ci-dessous:

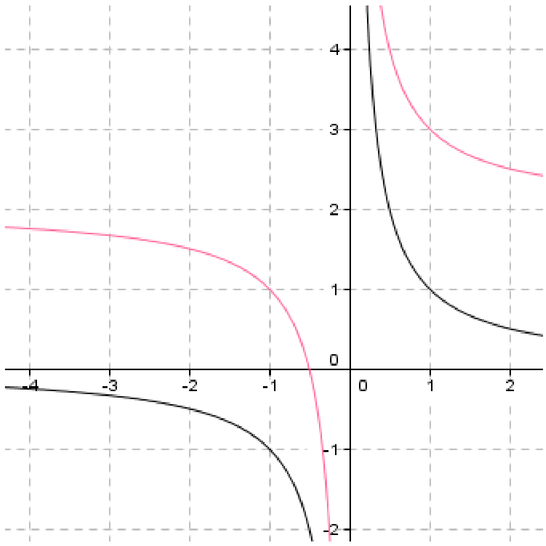
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = \|x\|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



II. Quelques fonctions composées :

A la fonction $u(x) + k$

Quand on rajoute une constante k à une fonction alors toutes les images se retrouvent augmentées de k et la courbe se retrouve décalée de k unités vers le haut (translation de vecteur $k\,\vec{j}$, avec $\vec{j}$ le vecteur unitaire vertical)



Exemple :

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $u(x) = \frac{1}{x}$

et f la fonction définie sur le même intervalle par :

$f(x) = u(x) + 2$

Alors on aura :

x	-4	-2	-1	-0,5	0,5	1	2
$u(x)$	-0,25	-0,5	-1	-2	2	1	0,5
$f(x)$	1,75	-1,5	1	0	4	3	2,5

Pour passe de la deuxième à la troisième ligne on a tout simplement ajouté 2

La courbe, elle, se retrouve décalée de deux unités vers le haut.

B la fonction $u(x+\lambda)$

Quand dans une fonction on substitue à la variable x l'expression « $x+\lambda$ » alors pour une même image l'antécédent doit perdre λ unités. La courbe se retrouve décalée de λ unités vers la gauche. (translation de vecteur $-\lambda\,\vec{\imath}$, avec $\vec{\imath}$ le vecteur unitaire horizontal)

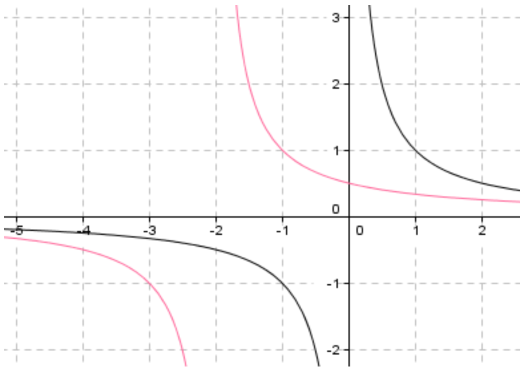
Exemple :

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $u(x)=\frac{1}{x}$ et g la fonction définie sur le même intervalle par $g(x)=u(x+2)+2$

Alors on aura :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$u(x)$	-1/4	-1/3	-1/2	-1	X	1	0,5	1/3
$g(x)$	-1/2	-1	X	1	1/2	1/3	1/4	1/5

Pour passe de la deuxième à la troisième ligne, il faut regarder ce qui a été écrit deux unités plus loin.



La courbe, elle, se retrouve décalée de deux unités vers le haut.

C la fonction $|u(x)|$

Quand considère la valeur absolue d'une fonction, on remplace toutes les images par leur valeur absolue, c'est-à-dire qu'on ne fait rien si elles sont déjà positive, et dans le cas contraire on prendra leur opposée. Graphiquement : la partie de la courbe de u audessus de l'axe des abscisses reste inchangée par contre, la partie sous l'axe se retrouve reflétée à l'identique audessus de l'axe.

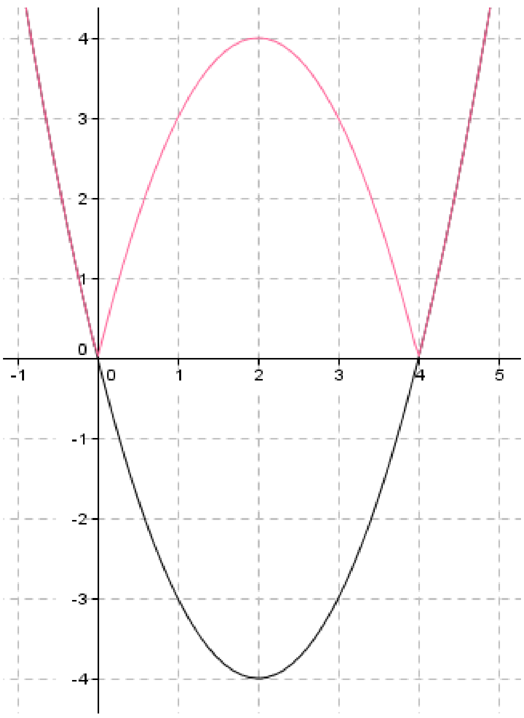
Exemple :

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $u(x)=x^2-4x$ et g la fonction définie sur le même intervalle par $h(x)=|u(x)|$

Alors on aura :

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$u(x)$	12	5	0	-3	-4	-3	0	5
$f(x)$	12	5	0	3	4	3	0	5

Pour passe de la deuxième à la troisième ligne, il faut prendre la valeur sans son signe.



Avant 0 et après 4 les courbes représentatives des fonctions u et h sont identiques par contre entre 0 et 4 , la courbe représentative de h est obtenue par symétrie de celle de u par rapport à l'axe des abscisses.