Fonctions (rappels de seconde)

I. notions de base

Définition

Soit D_f un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$)

- définir une fonction f de D_f dans $\mathbb{R}$ c'est associer à chaque réel x de D_f, un réel unique noté f(x).
- On dit que D_f est l'ensemble de définition de f, ou encore que f est définie sur l'ensemble D_f.

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f

- Pour tout x de D_f le réel f(x) s'appelle l'image de x par f.
- *x* est appelé antécédent de *f*(*x*) par *f*. Un nombre peut avoir un, plusieurs ou aucun antécédent par une fonction. Les antécédents de *k* par la fonction *f* sont les solutions de l'équation *f*(*x*) = *k*.

Exemple

Si on pose $f(x) = x^2 + 1$ donner l'image de 7 par f et les antécédents de 10, 1 et -3 par f

7 a pour image 50 par f

Pour donner les antécédents de 10, 1 et -3 je vais devoir résoudre trois équations :

f(x)=10
⇔ $x^2 + 1 = 10$
⇔ $x^2 - 9 = 0$
⇔ $(x-3)(x+3) = 0$
(un produit de facteurs est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul)
⇔ x = 3 ou x = -3
⇔ $S=\{3; -3\}$

f(x)=1
⇔ $x^2 = 0$
⇔ x = 0
⇔ $S=\{0\}$

f(x)=-3
⇔ $x^2 = -2$
⇔ $S=\{\emptyset\}$
car un carré ne peut être négatif

Ainsi par la fonction f, 10 a deux antécédents 3 et -3, 1 a un antécédent 0 et -3 n'a pas d'antécédent.

II. Représentation graphique d'une fonction

Vocabulaire.

Le point O est l'**origine** du repère

(OI) est l'axe des **abscisses** (horizontal) (OJ) est l'axe des **ordonnées** (vertical)

La longueur OI est l'unité de l'axe des abscisses et la longueur OJ est celle de l'axe des ordonnées

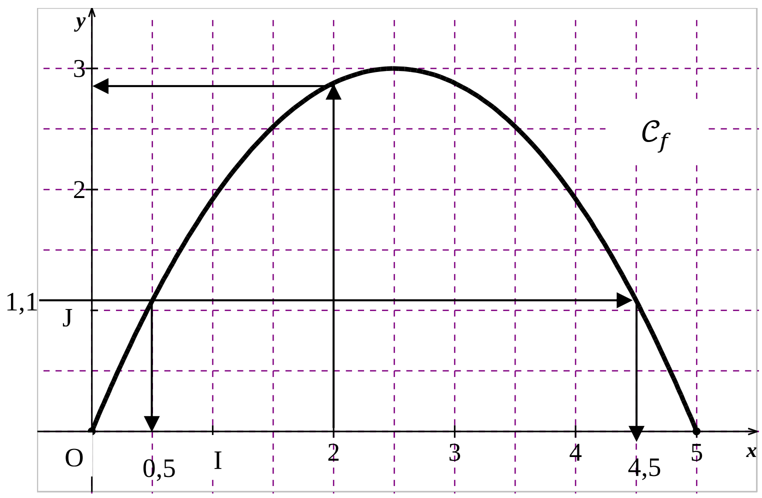
Le repère est **orthogonal** lorsque (OI)⊥(OJ), il est **orthonormal** lorsque (OI)⊥(OJ) et OI = OJ.

Définition

f est une fonction et D_f son ensemble de définition.

La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ (ou courbe représentative) de f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées (x ; f(x)) où x est un élément de D_f.

Ainsi : $M(a;b) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow f(a) = b$



Exemple.

Soit f la fonction définie sur [0 ;5] par :

$f(x) = \frac{12x}{5} - \frac{12x^2}{25}$

Le point $E(-2; 2{,}88)$ appartient-il à la courbe représentative de la fonction f ?

$f(2) = \frac{12\times 2}{5} - \frac{12\times 2^2}{25} = 4{,}8 - 1{,}92 = 2{,}88$

L'image de 2 est 2,88 donc le point E est sur la courbe.

Détermination de l'image par le graphique :
Pour lire l'image de 2 par f, on se place sur l'axe horizontal et on cherche sur celui-ci le point d'abscisse 2, on trace une droite verticale passant par ce point. L'image est l'ordonnée de l'unique point d'intersection entre la droite verticale tracée et la courbe.

Détermination de l'antécédent par le graphique :
Les antécédents de 1,1 par $\mathcal{A}$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $y = 1{,}1$
On se place sur l'axe des ordonnées, on trace la droite d'équation $y = 1{,}1$, à partir des points d'intersection de la courbe et de la droite, on se déplace verticalement jusqu'à l'axe horizontal pour pouvoir lire les abscisses des points obtenus.

III. Construction de la courbe représentative d'une fonction :

Méthode. Pour tracer la courbe, on place des points dont on a calculé les coordonnées : on choisit les abscisses et chaque ordonnée est l'image de l'abscisse correspondante par la fonction *f*.

Exemple. $f(x) = \frac{12x}{5} - \frac{12x^2}{25}$

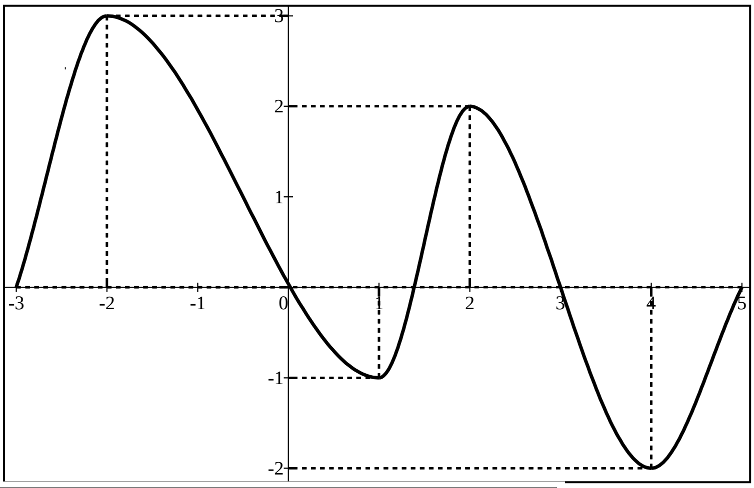
x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$	0	1,08	1,92	2,52	2,88	3	2,88	2,52	1,92	1,08	0

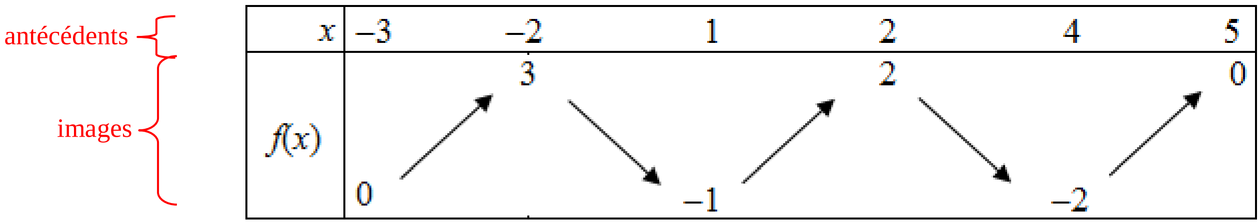
Avec la calculatrice.
Après avoir rentré la fonction 12X/5-12X²/25 dans Y_1 (on utilise la touche f(x) pour cela), on réglera le tableau à l'aide de déf table et on afficher le tableau avec table

IV. Variations d'une fonction

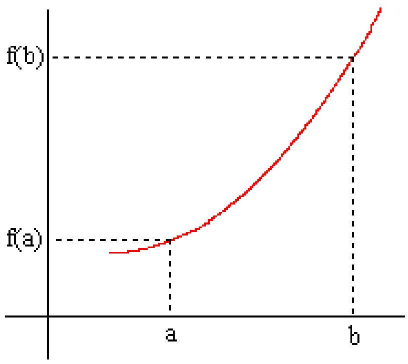
a) Tableau de variations.
Le tableau de variations d'une fonction est un résumé de la courbe.
On y trouve :
- le domaine de définition de la fonction *f*.
- les changements de variations (*f* croissante ou décroissante)
- les valeurs extrêmes de la fonction (maximum ou minimum)

Exemple. Soit la fonction *f* donnée par la courbe ci-dessous, définie sur l'intervalle [−3,5].

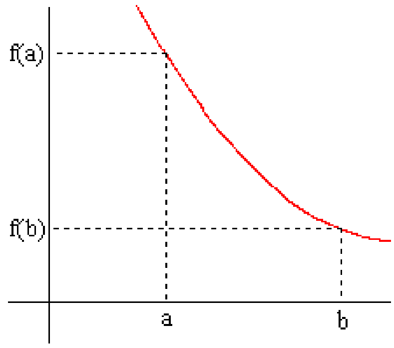




b) Variations d'une fonction.
Définition.
Soit *f* une fonction :
On dit que *f* est **croissante** lorsque pour tous nombres *a* et *b* tels que :
$a < b$, leurs images vérifient $f(a) < f(b)$. Cela signifie que lorsque *x* augmente, son image $f(x)$ augmente aussi.



On dit que *f* est **décroissante** lorsque pour tous nombres *a* et *b* tels que : $a < b$, leurs images vérifient $f(a) > f(b)$. Cela signifie que lorsque *x* augmente, son image $f(x)$ diminue.



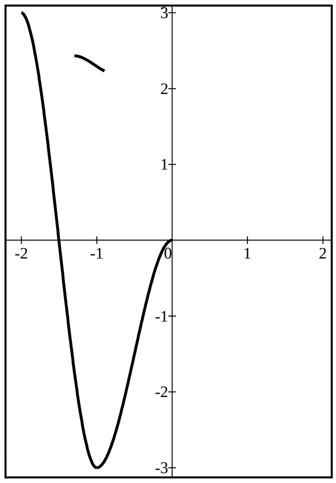
c) Extrema d'une fonction.

Définition.

Le **minimum** $f(a)$ d'une fonction est la plus petite valeur prise par cette fonction :pour tout $x \in D_f$, $f(x) \geq f(a)$

Le **maximum** $f(a)$ d'une fonction est la plus grande valeur prise par cette fonction :pour tout $x \in D_f$, $f(x) \leq f(a)$

d) Construction d'une courbe compatible avec un tableau de variation.



Soit un tableau de variation :

x	-2		-1		0		2
$f(x)$	3	↘	-3	↗	0	↘	-1

A droite on a tracé une des courbes représentative de f compatible avec le tableau de variation.

V. fonctions de références

Définition.

Toute fonction du type $f(x) = ax + b$ où *a* et *b* sont des réels donnés est appelée fonction
a est le coefficient directeur et *b* l'ordonnée à l'origine.

Si $a = 0$ alors $f(x) = b$ est une fonction constante.

Si $b = 0$ alors $f(x) = ax$ est une fonction linéaire.

Propriété.

La fonction affine $f(x) = ax + b$ est représentée graphiquement par la droite d'équation $y = ax + b$ qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
a est le coefficient directeur et *b* l'ordonnée à l'origine.

Propriété.

Soit x_1 et x_2, deux réels distincts et *f* une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$ alors le coefficient directeur *a* est
$a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ et $f(x) = a(x - x_1) + f(x_1)$

Exemple.

Soit *f* la fonction affine telle passant par les points $(2; 5)$ et $(5; 11)$ c'est-à-dire telle que $f(2) = 5$ et $f(5) = 11$.
Déterminer l'expression algébrique de *f*.
$a = \frac{5-11}{2-5} = \frac{-6}{-3} = 2$ et $f(x) = 2(x - 2) + 5 = 2x - 4 + 5 = 2x + 1$.

Théorème. Tableau de variations.

Soit une fonction affine $f(x) = ax + b$

Si $a > 0$, *f* est strictement croissante

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		↗	

Si $a < 0$, *f* est strictement décroissante

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		↘	

Théorème. Tableau de signe.

La fonction $f(x) = ax + b$ s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$ si $a \neq 0$

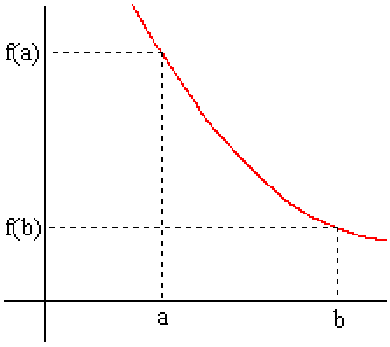
- Si $a > 0$,

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

- Si $a < 0$,

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

On dit que f est **décroissante** lorsque pour tous nombres a et b tels que : $a < b$, leurs images vérifient $f(a) > f(b)$. Cela signifie que lorsque x augmente, son image $f(x)$ diminue.



c) Extrema d'une fonction.

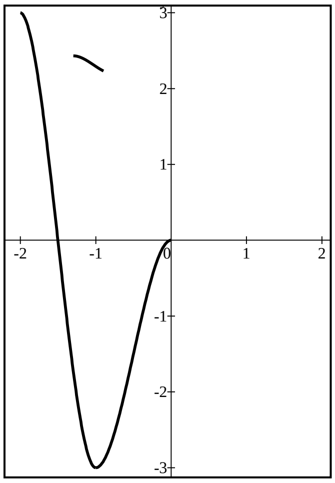
Définition.
Le **minimum** $f(a)$ d'une fonction est la plus petite valeur prise par cette fonction :pour tout $x \in D_f$, $f(x) \geq f(a)$
Le **maximum** $f(a)$ d'une fonction est la plus grande valeur prise par cette fonction :pour tout $x \in D_f$, $f(x) \leq f(a)$

d) Construction d'une courbe compatible avec un tableau de variation.

Soit un tableau de variation :

x	-2		-1		0		2
$f(x)$	3	↘	-3	↗	0	↘	-1

A droite on a tracé une des courbes représentative de f compatible avec le tableau de variation.



V. fonctions de références

Définition.
Toute fonction du type $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels donnés est appelée fonction
a est le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine.
Si $a = 0$ alors $f(x) = b$ est une fonction constante. Si $b = 0$ alors $f(x) = ax$ est une fonction linéaire.

Propriété.
La fonction affine $f(x) = ax + b$ est représentée graphiquement par la droite d'équation $y = ax + b$ qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
a est le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine.

Propriété.
Soit x_1 et x_2, deux réels distincts et f une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$ alors le coefficient directeur a est $a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ et $f(x) = a(x - x_1) + f(x_1)$

Exemple.
Soit f la fonction affine telle passant par les points $(2; 5)$ et $(5; 11)$ c'est-à-dire telle que $f(2) = 5$ et $f(5) = 11$.
Déterminer l'expression algébrique de f.
$a = \frac{5-11}{2-5} = \frac{-6}{-3} = 2$ et $f(x) = 2(x - 2) + 5 = 2x - 4 + 5 = 2x + 1$.

Théorème. Tableau de variations.
Soit une fonction affine $f(x) = ax + b$

Si $a > 0$, f est strictement croissante

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		↗	

Si $a < 0$, f est strictement décroissante

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		↘	

Théorème. Tableau de signe.
La fonction $f(x) = ax + b$ s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$ si $a \neq 0$

- Si $a > 0$,

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

- Si $a < 0$,

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	