Fiche d’exercices suites

www.dimension-k.com

Exercice 1

Soit (v_n) une suite définie par $v_0 = 4$ et par $v_{n+1} = v_n - 2$ pour tout entier naturel n. Donner les valeurs de v_1 et v_3.

Exercice 2

Soit (w_n) une suite définie pour tout entier naturel n non nul par $w_n = 3 - \frac{1}{2n}$.
Donner les valeurs de w_6 et w_{3p+4} avec p un entier naturel.

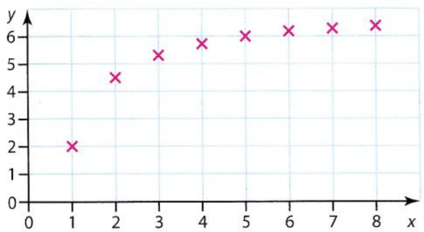
Exercice 3

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 3n + 1$.
Donner l’expression de u_{n+1} et u_{2n+3}

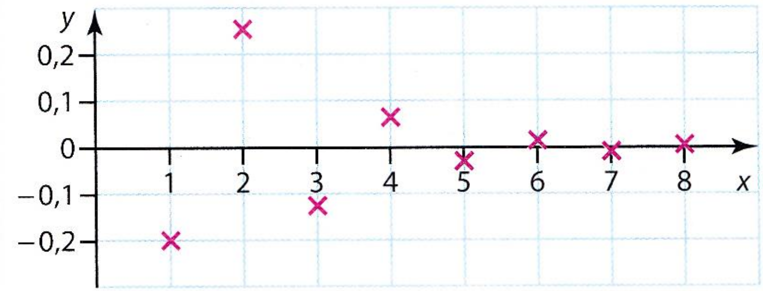
Exercice 4

Pour chacune des suites donner une valeur approchée des termes de rangs 1 et 5, puis conjecturer le sens de variation de la suite.

a)



b)



c)

Exercice 5

Soit (a_n) et (b_n) deux suites définies pour tout n entier naturel respectivement par $a_n = -n + 4$ et $b_n = n^2 - 1$

1) Déterminer les signes de $a_{n+1} - a_n$ et $b_{n+1} - b_n$
2) En déduire le sens de variation de chacune des deux suites.

Exercice 6

Soit (p_n), (q_n) et (r_n) trois suites définies pour tout n entier naturel respectivement par $p_n = 3^n$, $q_n = \left(-\frac{13}{10}\right)^n$ et $r_n = \frac{2^{2n+1}}{5^{n-2}}$

1) Déterminer $\frac{p_{n+1}}{p_n}$, $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ et $\frac{r_{n+1}}{r_n}$
2) Déterminer $p_{n+1} - p_n$, $q_{n+1} - q_n$ et $r_{n+1} - r_n$
3) En déduire les sens de variation des trois suites.

Exercice 7

Soit (a_n) et (b_n) deux suites définies pour tout n entier naturel respectivement par $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n = \frac{2}{n-2}$

1) A votre avis quelles restrictions devrait on rajouter quant aux valeurs de n ?
2) Déterminer les signes de $a_{n+1} - a_n$ et $b_{n+1} - b_n$
3) En déduire le sens de variation de chacune des deux suites.

Exercice 8

Après avoir indiqué pour chacune des suites si elles sont définies par récurrence ou de manière explicite, calculer leur terme de rang 3

1) $u_0 = 7$, $u_{n+1} = 2u_n - 10$ 2) $v_n = 2n - 10$
3) $w_n = 3 \times 4^n - 5$ 4) $t_2 = 16$, $t_{n+1} = 5 + \sqrt{t_n}$

Exercice 9

Calculer les quatre premiers termes (non donnés) des suites suivantes :

$(u_n) : \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = n^2 + 2\,u_n \end{cases}$ $(v_n) : \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{v_n - 4}{v_n + 1} \end{cases}$

$(w_n) : w_n = 5n + \frac{3}{n+2}$ $(t_n) : t_n = p^3 - 4p + 7$

Exercice 10

1) Donner si c’est possible le sens de variation des suites suivantes :

$u_n = -4n + 5$ $v_n = n^2 + 3n + 4$ $w_n = 5 + (-3)^n$ $t_n = 5 + 2^n$

$x_n = \frac{-7}{n-1}$ $(y_n) : \begin{cases} y_0 = -1 \\ y_{n+1} = \frac{1}{y_n + 2} \end{cases}$ $(z_n) : \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_{n+1} = \frac{1 - z_n}{z_n + 1} \end{cases}$

2) prouver que la suite définie pour tout n entier naturel par $a_n = 2^n - 10n + 7$ est croissante à partir du rang 4.

Fiche révision

Pour assurer au contrôle vous devez maitriser un certain nombre de compétences :

Savoir calculer les premiers termes d'une suite qu'elle soit définie en fonction de $\boldsymbol{n}$ ou par récurrence.

(exercices 1,2, 3, 8 et 9)

Pour une suite (u_n) définie en fonction de n, savoir jouer avec les indices (être capable de déterminer une expression de u_{n+1}, u_{m^2-5} par exemple)

(exercices 2 et 3 de la fiche)

Programmation:

- Savoir écrire un programme en python permettant de trouver n'importe quel terme d'une suite.
- Savoir l'expliquer (à quoi correspondent les fonctions int(), input(), for, range, print.
- Savoir l'exécuter (si vous n'avez pas python sur votre calculatrice, il vous faut savoir EN PLUS adapter le programme dans le langage de la machine que vous utilisez

(cf vidéo Youtube où tout est expliqué en détail https://youtu.be/jBeZP0uQYWA)

Variations de la suite $(\boldsymbol{u_n})$

- Savoir la conjecturer à l'aide d'un graphique ou de termes préalablement calculés

  (exercice 4)

- Savoir prouver la conjecture :
  - Si elle n'est ni croissante ni décroissante : proposer deux contre exemples

    (voir bonus à la fin de la correction de l'exercice 4)
  - Si elle est croissante savoir prouver que $u_{n+1} - u_n$ est positive (éventuellement à partir d'un rang donné)

    (voir exercice 10)
  - Si elle est décroissante savoir prouver que $u_{n+1} - u_n$ est négative (éventuellement à partir d'un rang donné)

    (voir exercice 10)

Révisions d'années précédentes :

savoir faire le tableau de signe d'une expression factorisée

(cf vidéos d'Yvan Monka, fiche méthode et exercices sur dimension-k.com)

Correction Fiche d'exercices suites

www.dimension-k.com

Exercice 1

Soit (v_n) une suite définie par $v_0 = 4$ et par $v_{n+1} = v_n - 2$ pour tout entier naturel n. Donner les valeurs de v_1 et v_3.

$v_1 = v_0 - 2 = 4 - 2 = 2$ & $v_2 = v_1 - 2 = 2 - 2 = 0$ et

$v_3 = v_2 - 2 = 0 - 2 = -2$

Exercice 2

Soit (w_n) une suite définie pour tout entier naturel n non nul par $w_n = 3 - \frac{1}{2n}$.

Donner les valeurs de w_6 et w_{3p+4} avec p un entier naturel.

$w_6 = \frac{3}{1} - \frac{1}{2\times6} = \frac{3\times12}{1\times12} - \frac{1}{12} = \frac{35}{12}$

$w_{3p+4} = \frac{3}{1} - \frac{1}{2(3p+4)} = \frac{3\times2(3p+4)}{1\times2(3p+4)} - \frac{1}{2(3p+4)} = \frac{18p+24-1}{2(3p+4)} = \frac{18p+23}{2(3p+4)}$

Exercice 3

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 3n + 1$.

Donner l'expression de u_{n+1} et u_{2n+3}

$u_{n+1} = (n+1)^2 - 3(n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - (3n+3) + 1 = n^2 - n - 1$

$u_{2n+3} = (2n+3)^2 - 3(2n+3) + 1 = 4n^2 + 12n + 9 - (6n+9) + 1$

$= 4n^2 + 12n + 9 - 6n - 9 + 1 = 4n^2 + 6n + 1$

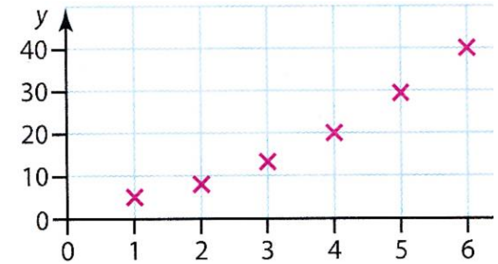
Exercice 4

Pour chacune des suites donner une valeur approchée des termes de rangs 1 et 5, puis conjecturer le sens de variation de la suite.

a)

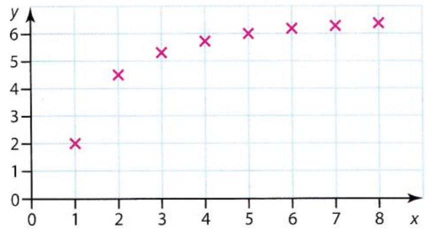
$u_1 \approx 5$ et $u_5 = 30$

La suite semble croissante



b) $u_1 = 2$ et $u_5 = 6$

la suite semble croissante

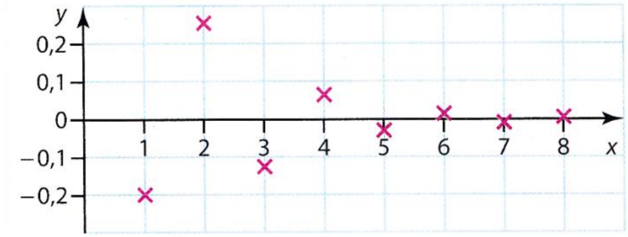


c)

$u_1 = -0{,}2$

$u_5 \approx -0{,}3$

La suite semble être ni croissante ni décroissante. Ça se prouve facilement en comparant les trois premiers termes :



elle ne peut être croissante car $u_3 < u_2$ et

elle ne peut être décroissante car $u_2 < u_1$

Exercice 5

Soit (a_n) et (b_n) deux suites définies pour tout n entier naturel respectivement par $a_n = -n + 4$ et $b_n = n^2 - 1$

1) *Déterminer les signes de $a_{n+1} - a_n$ et $b_{n+1} - b_n$*
2) *En déduire le sens de variation de chacune des deux suites.*

1) $a_{n+1} - a_n = -(n+1) + 4 - (-n+4) = -n - 1 + 4 + n - 4 = -1$ et

$b_{n+1} - b_n = (n+1)^2 - 1 - (n^2 - 1) = n^2 + 2n + 1 - 1 - n^2 + 1 = 2n + 1$

2) $a_{n+1} - a_n = -1 < 0$ donc la suite est décroissante

et $b_{n+1} - b_n = 2n + 1 > 0$ donc la suite est croissante

Preuve de $2n + 1 > 0$:

Méthode 1 : n étant positif ou nul on aura $2n$ qui le sera aussi et donc $2n + 1 > 0$

Méthode 2 : pour connaitre le signe de $2n + 1$, on peut se demander quand est ce que cette expression est positive : résolvons l'inéquation : $2n + 1 > 0$

$\Leftrightarrow 2n > -1 \Leftrightarrow n > -\frac{1}{2}$ donc pour que notre expression soit strictement positive il suffit que le rang soit strictement supérieur à $-\frac{1}{2}$ ce qui est bien évidemment toujours le cas. Ainsi pour tout entier naturel n on aura $2n + 1 > 0$ donc la suite est croissante.

Exercice 6

Soit (p_n), (q_n) et (r_n) trois suites définies pour tout n entier naturel respectivement par $p_n = 3^n$, $q_n = \left(-\frac{13}{10}\right)^n$ et $r_n = \frac{2^{2n+1}}{5^{n-2}}$

1) Déterminer $\frac{p_{n+1}}{p_n}$, $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ et $\frac{r_{n+1}}{r_n}$
2) Déterminer $p_{n+1} - p_n$, $q_{n+1} - q_n$ et $r_{n+1} - r_n$
3) En déduire les sens de variation des trois suites.

1) $\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3^1$, $\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{\left(-\frac{13}{10}\right)^{n+1}}{\left(-\frac{13}{10}\right)^n} = \left(-\frac{13}{10}\right)^1 = -1{,}3$

et $\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{\frac{2^{2(n+1)+1}}{5^{(n+1)-2}}}{\frac{2^{2n+1}}{5^{n-2}}} = \frac{\frac{2^{2n+2+1}}{5^{n+1-2}}}{\frac{2^{2n+1}}{5^{n-2}}} = \frac{2^{2n+2+1}}{5^{n+1-2}} \times \frac{5^{n-2}}{2^{2n+1}} = \frac{2^{2n+3}}{2^{2n+1}}\frac{5^{n-2}}{5^{n-1}}$

$= 2^{2n+3-(2n+1)}5^{n-2-(n-1)} = 2^{2n+3-2n-1}5^{n-2-n+1} = 2^2 5^{-1} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

2)& 3) $p_{n+1} - p_n = 3^{n+1} - 3^n = 3^n 3 - 3^n 1 = 3^n(3-1) = 3^n 2 > 0$

donc la suite (p_n) est croissante,

$q_{n+1} - q_n = \left(-\frac{13}{10}\right)^{n+1} - \left(-\frac{13}{10}\right)^n = \left(-\frac{13}{10}\right)^n\left(-\frac{13}{10}\right) - \left(-\frac{13}{10}\right)^n 1$

$= \left(-\frac{13}{10}\right)^n \left(\left(-\frac{13}{10}\right) - 1\right) = \left(-\frac{13}{10}\right)^n \left(-\frac{23}{10}\right)$

Le signe de ce produit dépend de la valeur de n :

si n est pair $\left(-\frac{13}{10}\right)^n > 0$ et $q_{n+1} - q_n < 0$

si n est impair $\left(-\frac{13}{10}\right)^n < 0$ et $q_{n+1} - q_n > 0$

Le signe de $q_{n+1} - q_n$ n'étant pas constant la suite n'est ni croissante ni décroissante.

$r_{n+1} - r_n = \frac{2^{2(n+1)+1}}{5^{(n+1)-2}} - \frac{2^{2n+1}}{5^{n-2}} = \frac{2^{2n+3}}{5^{n-1}} - \frac{2^{2n+1}}{5^{n-2}} = \frac{2^{2n+1}2^2}{5^{n-2}5^1} - \frac{2^{2n+1}}{5^{n-2}}$

$= \frac{2^{2n+1}}{5^{n-2}}\frac{4}{5} - \frac{2^{2n+1}}{5^{n-2}}1 = \frac{2^{2n+1}}{5^{n-2}}\left(\frac{4}{5} - 1\right) = \frac{2^{2n+1}}{5^{n-2}}\left(-\frac{1}{5}\right) < 0$

La suite (r_n) est donc décroissante.

Exercice 7

Soit (a_n) et (b_n) deux suites définies pour tout n entier naturel respectivement par $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n = \frac{2}{n-2}$

1) A votre avis quelles restrictions devrait on rajouter quant aux valeurs de n
2) Déterminer les signes de $a_{n+1} - a_n$ et $b_{n+1} - b_n$
3) En déduire le sens de variation de chacune des deux suites.

1) ne voulant pas avoir de dénominateur nul on doit prendre $n \neq 0$ pour la suite (a_n) , on la définira donc pour tout n entier naturel non nul et $n \neq 2$ pour la suite (b_n), on la définira donc pour tout n entier naturel strictement plus grand que 2 (on ne veut pas d'interruption dans notre domaine de définition)

2) & 3) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n}{n(n+1)} - \frac{n+1}{(n+1)n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$

donc (a_n) est strictement décroissante.

$b_{n+1} - b_n = \frac{2}{(n+1)-2} - \frac{2}{n-2} = \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n-2} = \frac{2(n-2)}{(n-1)(n-2)} - \frac{2(n-1)}{(n-2)(n-1)}$

$= \frac{2n-4}{(n-1)(n-2)} - \frac{2n-2}{(n-1)(n-2)} = \frac{2n-4-(2n-2)}{(n-1)(n-2)} = \frac{-2}{(n-1)(n-2)} < 0$

donc (b_n) est strictement décroissante.

Exercice 8

Après avoir indiqué pour chacune des suites si elles sont définies par récurrence ou de manière explicite, calculer leur terme de rang 3

1) $u_0 = 7$, $u_{n+1} = 2u_n - 10$ la suite est définie par récurrence

$u_1 = 2u_0 - 10 = 4$ $u_2 = 2u_1 - 10 = -2$ et $u_3 = 2u_2 - 10 = -14$

2) $v_n = 2n - 10$ la suite est définie de manière explicite

$v_3 = 2 \times 3 - 10 = -4$

3) $w_n = 3 \times 4^n - 5$ la suite est définie de manière explicite

$w_3 = 3 \times 4^3 - 5 = 187$

4) $t_2 = 16$, $t_{n+1} = 5 + \sqrt{t_n}$ la suite est définie par récurrence

$t_3 = 5 + \sqrt{t_2} = 5 + 4 = 9$

Exercice 9

Calculer les quatre premiers termes (non donnés) des suites suivantes :

$(u_n) : \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = n^2 + 2\,u_n \end{cases}$

$u_1 = 0^2 + 2u_0 = 2(-1) = -2$ $u_2 = 1^2 + 2u_1 = 1 + 2(-2) = -3$

$u_3 = 2^2 + 2u_2 = 4 - 6 = -2$ $u_4 = 3^2 + 2u_3 = 9 + 2(-2) = 5$

$(v_n) : \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{v_n - 4}{v_n + 1} \end{cases}$

$v_2 = \frac{v_1 - 4}{v_1 + 1} = \frac{1-4}{1+1} = -\frac{3}{2}$ $v_3 = \frac{v_2 - 4}{v_2 + 1} = \frac{-\frac{3}{2} - 4}{-\frac{3}{2} + 1} = \frac{-\frac{11}{2}}{-\frac{1}{2}} = 11$

$v_4 = \frac{v_3 - 4}{v_3 + 1} = \frac{11-4}{11+1} = \frac{7}{12}$ $v_5 = \frac{v_4 - 4}{v_4 + 1} = \frac{\frac{7}{12} - \frac{4}{1}}{\frac{7}{12} + \frac{1}{1}} = \frac{-\frac{41}{12}}{\frac{19}{12}} = \frac{-41}{19}$

$(w_n) : w_n = 5n + \frac{3}{n+2}$

$w_0 = 5 \times 0 + \frac{3}{0+2} = \frac{3}{2}$ $w_1 = 5 \times 1 + \frac{3}{1+2} = 5 + 1 = 6$

$w_2 = 5 \times 2 + \frac{3}{2+2} = 10 + \frac{3}{4} = 10{,}75$ $w_3 = 15 + \frac{3}{5} = 15{,}6$

$(t_n) : t_n = p^3 - 4p + 7$

$t_0 = 0^3 - 4 \times 0 + 7 = 7$ $t_1 = 1^3 - 4 \times 1 + 7 = 4$

$t_2 = 2^3 - 4 \times 2 + 7 = 7$ $t_4 = 4^3 - 4 \times 4 + 7 = 55$

Exercice 10

1) Donner si c'est possible le sens de variation des suites suivantes :

$u_n = -4n + 5$ $v_n = n^2 + 3n + 4$ $w_n = 5 + (-3)^n$ $t_n = 5 + 2^n$

$x_n = \frac{-7}{n-1}$ $(y_n) : \begin{cases} y_0 = -1 \\ y_{n+1} = \frac{1}{y_n+2} \end{cases}$ $(z_n) : \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_{n+1} = \frac{1-z_n}{z_n+1} \end{cases}$

2) prouver que la suite définie pour tout n entier naturel par $a_n = 2^n - 10n + 7$ est croissante à partir du rang 4.

1)

$u_{n+1} - u_n = (-4(n+1) + 5) - (-4n + 5) = -4n - 4 + 5 + 4n - 5 = -4$

Ici $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite est décroissante

$v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 + 3(n+1) + 4 - (n^2 + 3n + 4)$
$= n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 + 4 - n^2 - 3n - 4 = 2n + 4 > 0$ (cf ex5)

Donc la suite (v_n) est croissante.

$w_{n+1} - w_n = 5 + (-3)^{n+1} - (5 - (-3)^n) = 5 + (-3)^n(-3) - 5 + (-3)^n 1$
$= (-3)^n(-3 - 1) = (-3)^n(-4)$

le signe de ce produit dépend de la valeur de n :

si n est pair $(-3)^n > 0$ et $w_{n+1} - w_n < 0$

si n est impair $(-3)^n < 0$ et $w_{n+1} - w_n > 0$

Le signe de $w_{n+1} - w_n$ n'étant pas constant la suite n'est ni croissante ni décroissante.

$t_{n+1} - t_n = 5 + 2^{n+1} - (5 + 2^n) = 5 + 2^n 2 - 5 - 2^n 1 = 2^n(2 - 1) = 2^n > 0$

La suite (t_n) est donc croissante

$x_{n+1} - x_n = \frac{-7}{n+1-1} - \frac{-7}{n-1} = \frac{-7(n-1)}{n(n-1)} - \frac{-7n}{(n-1)n} = \frac{-7n+7+7n}{n(n-1)} = \frac{7}{n(n-1)}$

On remarque que la suite n'est pas définie pour $n = 0$

Du moment que n est strictement positif $\frac{7}{n(n-1)} > 0$ la suite sera donc croissante pour $n > 0$.

$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{y_n+2} - \frac{y_n}{1} = \frac{1}{y_n+2} - \frac{y_n(y_n+2)}{y_n+2} = \frac{1-y_n^2-2y_n}{y_n+2}$

A notre niveau de maitrise mathématique il est difficile de se prononcer sur le signe

Tentons une autre approche

$y_1 = \frac{1}{-1+2} = \frac{1}{1} = 1$ puis pour $y_2 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$

Ainsi $y_1 - y_0 = 2 > 0$ donc la suite ne peut être décroissante

$y_2 - y_1 = -\frac{2}{3} < 0$ donc la suite ne peut être croissante

Ainsi la suite n'est ni croissante ni décroissante.

$z_2 = \frac{1-1}{1+1} = 0$ et $z_3 = \frac{1-0}{0+1} = 1$ et $z_4 = 0$

On va avoir une suite cyclique qui prend successivement comme valeurs 1 et 0 , elle n'est ni croissante ni décroissante.

2)

$a_{n+1} - a_n = 2^{(n+1)} - 10(n+1) + 7 - (2^n - 10n + 7)$
$= 2^n 2 - 10n - 10 + 7 - 2^n 1 + 10n - 7 = 2^n(2-1) - 10 = 2^n - 10$

2^n est croissante pour $n = 4$ on a $2^n = 16$ et donc après on aura des valeurs plus grande que 16 et ainsi $a_{n+1} - a_n = 2^n - 10 \geq 6 > 0$ à partir de $n = 4$