Devoir probabilités (entrainement)

Durée 1h15min

Exercice 1

65% des élèves en première dans un lycée ont un Iphone. On constitue au hasard un échantillon de 3 élèves de ce lycée. On suppose que le nombre d'élèves est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à celui de trois tirages successifs avec remise. La variable aléatoire X comptabilise le nombre d'élève ayant un IPhone dans l'échantillon.

1) Faire un arbre représentant la situation
2) Donner la loi de la variable aléatoire X
3) Déterminer $P(X = 0)$
4) Déterminer $P(X \geq 1)$

Exercice 2

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$0,1$	$0,2$	$0,05$	$0,15$	$0,5$

Déterminer les probabilités suivantes : $P(X \leq 3)$ $P(X < 4)$ $P(X \geq 2)$

Exercice 3

On a inventé un jeu, on lance un dès équilibré à six faces pour gagner il suffit d'avoir un quatre. On lance trois fois le dès, X est une variable aléatoire qui compte le nombre de réussite.

a) Prouver que X est une variable aléatoire Binomiale de paramètre $n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$
b) Donner l'espérance et la l'écart type de X.

Exercice 4

Faire un tableau des coefficients binomiaux jusqu'à $n = 6$

Exercice 5

Partie A

Une scierie produit des planches en chêne, en sapin ou en bois de hêtre pour fabriquer des parquets massifs. Il existe deux qualités de planche : les planches déclassées (de moins bonne qualité) et les planches de premier choix (de qualité supérieure). On sait que :

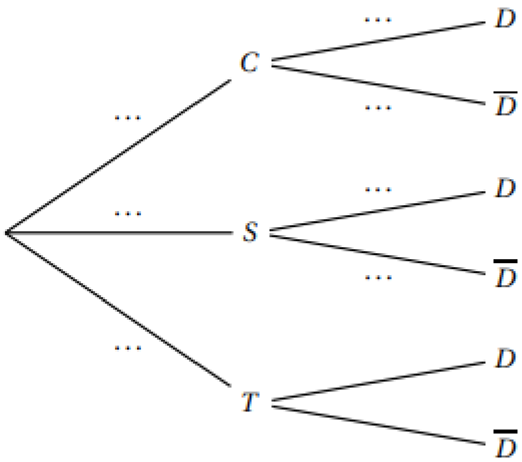
- 20 % des planches produites sont en chêne,
- 66 % des planches sont en sapin,
- les autres sont en bois de hêtre.

De plus, 46 % des planches en chêne sont déclassées et 25 % des planches en sapin sont déclassées.

On choisit une planche au hasard dans la production de la scierie, et on définit les évènements suivants :

- C : « la planche est en chêne » ;
- S : « la planche est en sapin » ;
- T : « la planche est en bois de hêtre » ;
- D : « la planche est déclassée ».

1. **a.** À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $p(C)$, $p_C(D)$ et $p_S(D)$.
   b. On représente la situation par l'arbre suivant. Recopier l'arbre et compléter les pointillés.



2. Calculer la probabilité que la planche soit en chêne et déclassée.
3. On sait que la scierie produit 32 % de planches déclassées.
   Montrer que $p(T \cap D) = 0,063$.
4. On choisit une planche de la production en bois de hêtre. Quelle est la probabilité qu'elle soit déclassée ?

Partie B

On choisit un lot de 10 planches au hasard, et on suppose que le nombre de planches déclassées dans ce lot peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,32$.

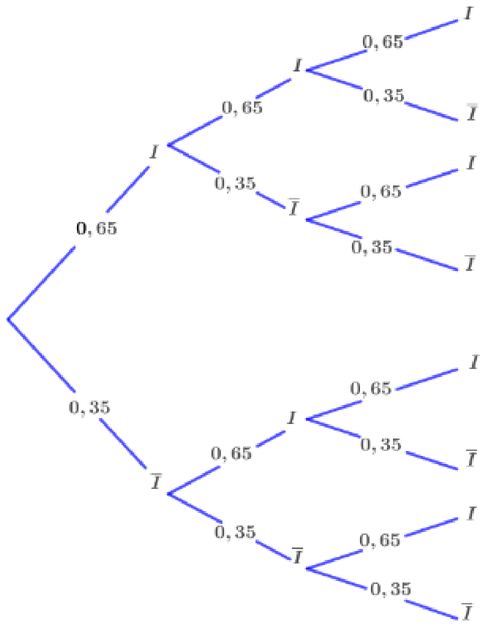
1. Calculer $p(X = 4)$ et interpréter le résultat.

2. Calculer la probabilité qu'au moins une planche du lot soit déclassée.

Correction

Exercice 1

1)



2)

L'expérience aléatoire a deux issues : « Avoir un IPhone » et « Ne pas avoir d'IPhone ». C'est donc **une épreuve de Bernoulli.**

Son paramètre est la probabilité que l'élève possède un IPhone c'est à dire $p = 0,65$

Cela signifie que choisir un élève possédant un IPhone est une épreuve de Bernoulli.

On effectue trois tirages. On répète, donc, de façon identique et indépendante 3 épreuves de Bernoulli.

Ainsi X qui compte le nombre d'élève ayant un iPhone suit une loi Binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}65$

3)

L'évènement avoir 0 IPhone correspond à l'évènement $\overline{I}\ \overline{I}\ \overline{I}$. Il n'y a qu'un seul chemin possible, le chiffre 0 a été mis en violet pour nous indiquer le chemin que nous avons pris.

Ainsi :

$P(X = 0) = P(\overline{I}\ \overline{I}\ \overline{I})$

$P(X = 0) = P(\overline{I}) \times P(\overline{I}) \times P(\overline{I})$

$P(X = 0) = 0,35 \times 0,35 \times 0,35$

$P(X = 0) = 0,35^3$

D'où : $\boxed{P(X = 0) \approx 0,043}$

Exercice 2

$P(X \leq 3) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}05 = 0{,}35$

$P(X < 4) = P(X \leq 3) = 0{,}35$

$P(X \geq 2) = 0{,}2 + 0{,}5 + 0{,}15 + 0{,}5 = 0{,}9$

Exercice 3

a) P(X=k) = $\binom{n}{k} p^k\ (1-p)^{n-k}$

- P(X=0) = $\binom{3}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3$ or $\binom{3}{0}$= 1, donc $P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$
- $P(X = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2$ or $\binom{3}{1}$ =3, donc $P(X = 1) = 3 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{72} = \frac{75}{216}$

- $P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1$ or $\binom{3}{2} = 3$, donc P(X=2) = $3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{72} = \frac{15}{216}$

- $P(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0$ or $\binom{3}{3}$ =1,

  donc $P(X=3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

b) X suit la loi binomiale de paramètre n=3 et p= $\frac{1}{6}$ donc : $E(X) = np = 3\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Au « chuck a luck », un joueur a en moyenne 1 chance sur 2 de gagner. Le jeu est donc équilibré.

c) $\sigma = \sqrt{n\,p\,(1-p)} = \sqrt{3\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)} = \sqrt{\frac{5}{12}} \approx 0{,}65$

L'écart-type de X est d'environ 0,65.

Exercice 4

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Exercice 5

Partie A

Une scierie produit des planches en chêne, en sapin ou en bois de hêtre pour fabriquer des parquets massifs. Il existe deux qualités de planche : les planches déclassées (de moins bonne qualité) et les planches de premier choix (de qualité supérieure).

On sait que :
- 20 % des planches produites sont en chêne,
- 66 % des planches sont en sapin,
- les autres sont en bois de hêtre.

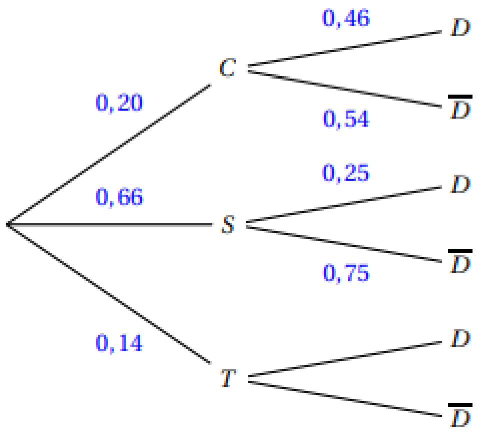
De plus, 46 % des planches en chêne sont déclassées et 25 % des planches en sapin sont déclassées.

On choisit une planche au hasard dans la production de la scierie, et on définit les évènements :

- C : « la planche est en chêne » ;
- S : « la planche est en sapin » ;
- T : « la planche est en hêtre » ;
- D : « la planche est déclassée ».

1. **a.**
   - 20 % des planches produites sont en chêne, donc $p(C) = 0,20$.
   - 46 % des planches en chêne sont déclassées, donc $p_C(D) = 0,46$.
   - 25 % des planches en sapin sont déclassées, donc $p_S(D) = 0,25$.

   b. On représente la situation par l'arbre suivant :



2. La probabilité que la planche soit en chêne et déclassée est $p(C \cap D) = p(C) \times p_C(D) = 0,20 \times 0,46 = 0,092$.
3. On sait que la scierie produit 32 % de planches déclassées, donc $p(D) = 0,32$.
   D'après la formule des probabilités totales : $p(D) = p(C \cap D) + p(S \cap D) + p(T \cap D)$.
   $p(D) = 0,32$, $p(C \cap D) = 0,092$ et $p(S \cap D) = 0,66 \times 0,25 = 0,165$
   Donc $0,32 = 0,092 + 0,165 + p(T \cap D)$ et donc $p(T \cap D) = 0,32 - 0,092 - 0,165 = 0,063$.
4. On choisit une planche de la production en bois de hêtre.
   La probabilité qu'elle soit déclassée est $p_T(D) = \dfrac{p(T \cap D)}{p(T)} = \dfrac{0,063}{0,14} = 0,45$.

Partie B

On choisit un lot de 10 planches au hasard, et on suppose que le nombre de planches déclassées dans ce lot peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,32$.

1. $p(X = 4) = \dbinom{10}{4} \times 0,32^4 \times (1 - 0,32)^{10-4} \approx 0,218$
   La probabilité qu'il y ait exactement 4 planches déclassées dans un lot de 10 est 0,218.
2. Pour calculer la probabilité $p(X \geqslant 1)$ qu'au moins une planche du lot soit déclassée, on passe par l'événement contraire : « aucune planche n'est déclassée » :
   $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (1 - 0,32)^{10} \approx 0,979$.