Droites et systèmes.

Nous sommes aujourd'hui habitués à rencontrer des courbes dans des domaines très variés : courbe des températures en médecine et en météorologie, courbe donnant en fonction du temps la concentration en gaz carbonique de l'air d'une ville, courbes utilisées en économie par exemple pour étudier l'évolution de coûts ou de bénéfices en fonction de la quantité produite ou vendue…
Dans ce premier chapitre sur les fonctions nous allons revenir sur deux fonctions de référence fondamentales et étudier quelques situations issues de la vie économique.

I Fonctions linéaires.

a est un réel donné. Lorsqu'à chaque réel x, on associe le réel ax, on définit une fonction linéaire f et on note $f(x) = ax$.

Exemples : voir feuille annexe.

Dans ce cas, les réels x et leurs images $f(x)$ forment deux suites de nombres proportionnelles.

Exemples : voir feuille annexe.

Méthode pour vérifier que des suites de nombres sont proportionnelles.
On calcule les quotients et on vérifie que c'est le même nombre.

Exemples : voir feuille annexe.

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère. Pour la tracer, je choisis un point de la droite dont l'abscisse est suffisamment éloignée de l'origine (qui est mon deuxième point.)

Exemple : traçons la courbe de la fonction f donnée par $f(x) = 2x$.
Voir feuille annexe.

***II Fonctions affines*.**

a et b sont deux réels donnés. Lorsqu'à chaque réel x, on associe le réel $ax + b$, on définit une fonction affine f et on note $f(x) = ax + b$. Lorsque $b = 0$, la fonction affine est dite fonction linéaire. Lorsque $a = 0$, la fonction affine est dite fonction constante. Le nombre a est appelé coefficient directeur. Le nombre b est appelé l'ordonnée à l'origine.

Exemples : voir feuille annexe.

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite d.
Pour la tracer, je remplis un tableau de valeurs.
Je peux utiliser deux méthodes :

- le calcul à la main
- la calculatrice et son mode table

Toute droite d non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

Exemple.
Tracer la représentation graphique de f définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 1$. Voir feuille annexe.

III Tracé d'une droite connaissant son coefficient directeur et un point.

Soit d la droite passant par A et de coefficient directeur a.
1. Je place le point $A\ (x_A\ ;\ y_A)$ que je connais.
2. Je place le point B d'abscisse $x_B = x_A + 1$ et d'ordonnée $y_B + a$, autrement dit à partir du point A, je me décale d'une unité horizontalement et de a unités verticalement.
3. Je trace la droite (AB) qui est la droite d cherchée.

Exemple
Traçons la droite d passant par $A(2;1)$ et de coefficient directeur 3. Voir feuille annexe.

<u>IV équations cartésiennes de droite</u>
Les droites du plans admettent toutes des équations cartésiennes de la forme $ax+by+c=0$. Elles admettent aussi toutes une équation réduite de la forme $x=a$ si la droite est verticale et $y=ax+b$ sinon.

Méthode pour savoir si un point est sur une droite dont on connait l'équation
Exemple :
Soit (D) la droite d'équation $=3x+4$, donner les positions des points $A(5;17)$, $B(-3;-2)$ et $C(1;7)$ par rapport à la droite (D)
Pour le point $A(5;17)$: $3x+4=3\times 5+4=19$ et $y=17$ or $17<19$ donc le point A est sous la droite (D)
Pour le point $B(-3;-2)$: $3x+4=3(-3)+4=-5$ et $y=-2$ or $-2>-5$ donc le point B est au-dessus de la droite (D)
Pour le point $C(1;7)$: $3x+4=3\times 1+4=7$ et $y=17$ donc le point C est sur la droite (D)

Remarque :
la droite qui représente la fonction affine f définie pour tout x réel par $f(x)=ax+b$ aura pour équation $y=ax+b$ (même coefficient directeur, même ordonnée à l'origine)

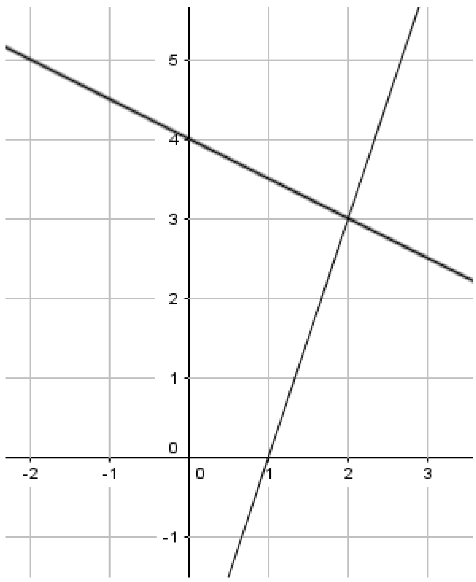
Méthode pour passer de l'équation cartésienne à l'équation réduite :
On cherche à isoler le y dans un membre et mettre tout le reste dans l'autre et s'il n'y a pas de y alors on isolera le x dans un membre et on mettra le reste dans l'autre membre

Exemple :
$15x+3y-7=0 \Leftrightarrow 3y=7-15x \Leftrightarrow y=\frac{7}{3}-\frac{15x}{3} \Leftrightarrow y=\frac{7}{3}-5x \Leftrightarrow y=-5x+\frac{7}{3}$
C'est une droite oblique de coefficient directeur -5 et d'ordonnée à l'origine $\frac{7}{3}$
$4x-9=0 \Leftrightarrow 4x=9 \Leftrightarrow x=\frac{9}{4}$
C'est une droite verticale coupant l'axe des abscisses, au point d'abscisse $\frac{9}{4}$

<u>V Résolution de système</u>
On appelle système d'équation à deux inconnues, la conjonction de deux équations à deux inconnues. Les solutions si elles existent sont les couples (x ;y) qui rendent vraie les deux égalités. Pour trouver ces couples solutions avec exactitude une méthode algébrique s'impose , si on peut se contenter d'une approximation ou d'une conjecture la méthode graphique peut être intéressante.

Méthode graphique
Je transforme les deux équations de mon système en équations réduites de droites, je trace celles-ci puis regarde les coordonnées du point d'intersection.
Attention si les deux droites ont le même coefficient directeur alors elles sont parallèles, et donc soit les droites n'ont aucun point en commun soit elles ont tous leur points en commun.

Exemple :
Résoudre le système : $\begin{cases}-x-2y+8=0\\-3x+y+3=0\end{cases}$
$\begin{cases}-x-2y+8=0\\-3x+y+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2y=x-8\\ y=3x-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{x}{-2}-\frac{8}{-2}\\ y=3x-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-\frac{1}{2}x+4\\ y=3x-3\end{cases}$
Je trace mes droites et je vois qu'elles se coupent au point de coordonnées $(2;3)$ donc on peut conjecturer que $x=2\ et\ y=3$ forment le couple de solution du système.
Si je remplace x et y par ces valeurs dans mes équations les égalités sont vraies donc on a bien $(2;3)$ couple de solutions



<u>VI Signe des fonctions affines</u>.

But : déterminer le signe de $f(x) = ax + b$.

Démonstration (avec disjonction des cas):

Cas 1 : $a > 0$

Cas 2 : $a < 0$

Exemples : Voir feuille annexe.

<u>VII Variations.</u>

Etudier le sens de variation d'une fonction f, c'est donner les plus grands intervalles sur lesquels f est strictement croissante, strictement décroissante ou constante. On résume ces propriétés dans un tableau appelé tableau de variation. Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$. Si $a > 0$ alors la fonction affine f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Le tableau de variation de la fonction f est donné sur la feuille annexe. Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$. Si $a < 0$ alors la fonction affine f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Le tableau de variation de la fonction f est donné sur la feuille annexe.