Cours : généralité fonctions

I notions de base

Définition 1
Soit D un intervalle de ℝ (ou une réunion d'intervalles de ℝ)

- Fabriquer ou définir une fonction f de D dans ℝ c'est associer à chaque réel x de D, un réel unique noté f(x).
- On dit que D est l'ensemble de définition de f, ou encore que f est définie sur l'ensemble D.
- Le réel f(x) s'appelle l'image de x par f.
- *x* est appelé antécédent de *f*(*x*) par *f*. Un nombre peut avoir un, plusieurs ou aucun antécédent par une fonction. Les antécédents de *k* par la fonction *f* sont les solutions de l'équation *f*(*x*) = *k*.

Exemple :
Soit une fonction $\mathcal{A}$ définie par :

$$\mathcal{A} : \begin{array}{ccc} [0\,;5] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{12x}{5} - \dfrac{12x^2}{25} \end{array}$$

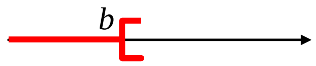
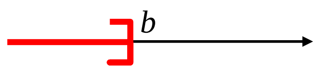
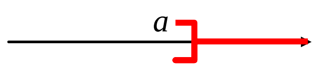
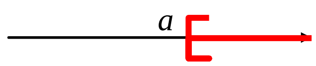
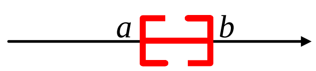
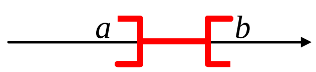
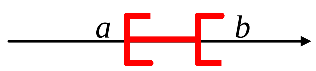
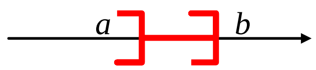
x est la **variable** — **l'image de *x*** par la fonction Aire

Ici l'ensemble de définition est [0 ;5]
$\mathcal{A}(2) = \frac{12\times 2}{5} - \frac{12\times 2^2}{25} = \frac{72}{25} = 2{,}88$
On peut dire que l'image de 2 par $\mathcal{A}$ est 2,88

Exemple :
$f(x) = 9 - 4(x-1)^2$ $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

Méthode.
Les opérations qui posent problèmes sont :
- la division, on ne peut pas diviser par 0. Les valeurs interdites sont celles qui annulent le dénominateur.
- la racine carrée, on ne peut pas prendre la racine carrée d'un nombre négatif. Les valeurs interdites sont celles qui rendent négatifs l'expression sous le radical.

Notation

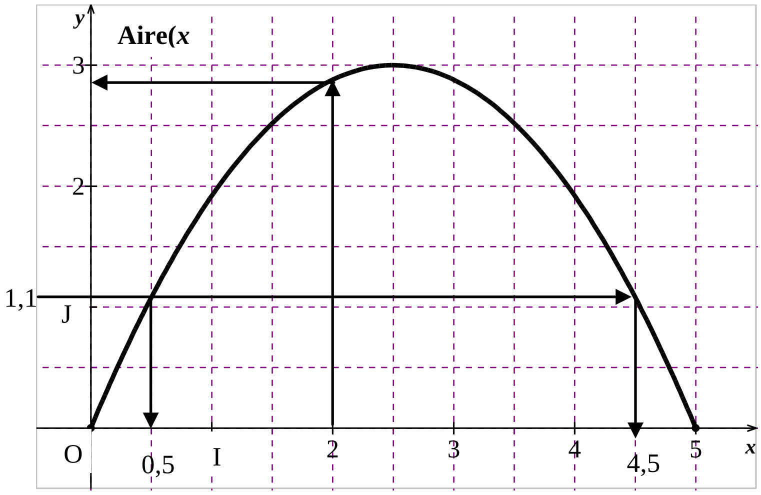
Le nombre réel *x* vérifie l'inégalité	L'intervalle représenté sur la droite graduée	Le nombre *x* appartient à l'intervalle
$x < b$		$x \in]-\infty, b[$
$x \leq b$		$x \in]-\infty, b]$
$x > a$		$x \in]a, +\infty[$
$x \geq a$		$x \in [a, +\infty[$
$a \leq x \leq b$		$x \in [a, b]$
$a < x < b$		$x \in]a, b[$
$a \leq x < b$		$x \in [a, b[$
$a < x \leq b$		$x \in]a, b]$

Exemples.
$g(x) = x + 3 + \frac{4}{x-2}$, $\quad x - 2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 2$ donc $D_g = R - \{2\}$ donc $D_g =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$
$h(x) = \sqrt{x-4}$, $x - 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 4$ donc $D_h = [4, +\infty[$

II Représentation graphique d'une fonction

Vocabulaire.
Le point O est l'origine du repère
(OI) est l'axe des abscisses (horizontal)
(OJ) est l'axe des ordonnées (vertical)
la longueur OI est l'unité de l'axe des abscisses
la longueur OJ est l'unité de l'axe des ordonnées
Le repère est orthogonal lorsque (OI)⊥(OJ)
Le repère est orthonormal lorsque (OI)⊥(OJ) et OI = OJ.

Définition 2
F est une fonction et D son ensemble de définition
La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ (ou courbe représentative) de f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées (x ; f(x)) où x est un élément de D.



On peut déduire de la définition 2 :
dire que M(a ; b) est un point de la courbe représentative de f revient à dire que a ∈ D et que f (a) = b

Exemple. Le point E(1,25 ; 2,25) appartient-il à la courbe représentative de la fonction Aire ?
$\text{Aire}(1{,}25) = \frac{12 \times 1{,}25}{5} - \frac{12 \times 1{,}25^2}{25} = 3 - 0{,}75 =$ $2{,}25$, l'image de 1,25 est 2,25 donc le point E est sur la courbe.

Détermination de l'image par le graphique :
Pour lire l'image de 2 par $\mathcal{A}$, on se place sur l'axe horizontal et on cherche sur celui-ci le point d'abscisse 2, on trace une droite verticale passant par ce point. L'image est l'ordonnée de l'unique point d'intersection entre la droite verticale tracée et la courbe.

Exemple. Déterminer l'aire du rectangle MNPB lorsque la longueur AM mesure 2 cm. L'aire mesure environ 2,9 cm^2.

Détermination de l'antécédent par le graphique :
Les antécédents de 1,1 par $\mathcal{A}$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite d'équation y = 1,1.
On se place sur l'axe des ordonnées, on trace la droite d'équation y = 1,1, à partir des points d'intersection de la courbe et de la droite, on se déplace verticalement jusqu'à l'axe des abscisses.

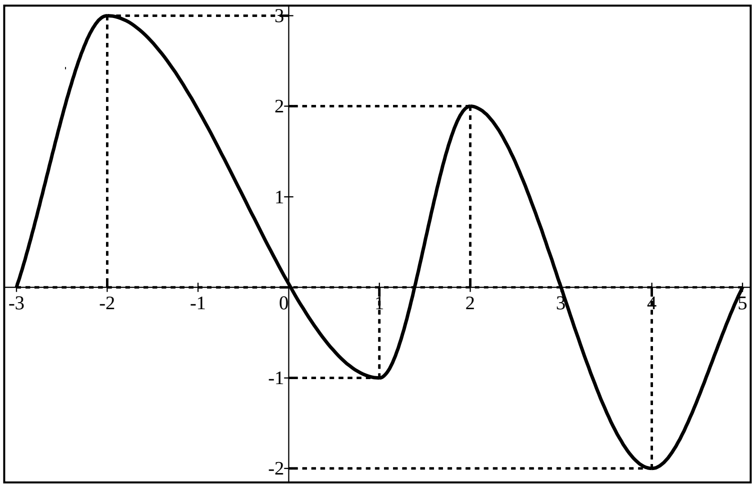
Exemple. Déterminer l'antécédent de 1,08 par la fonction Aire, c'est à dire déterminer combien doit mesurer la longueur AM pour que l'aire du rectangle MNPB mesure 1,1 cm^2. La longueur AM peut mesure 0,5 cm ou 4,5 cm environ.

III Variations d'une fonction

a) Tableau de variations.

Le tableau de variations d'une fonction est un résumé de la courbe.
On y trouve :
- le domaine de définition de la fonction f.
- les changements de variations (f croissante ou décroissante)
- les valeurs extrêmes de la fonction (maximum ou minimum)

Exemple. Soit la fonction f donnée par la courbe ci-dessous, définie sur l'intervalle $[-3,5]$.



antécédents

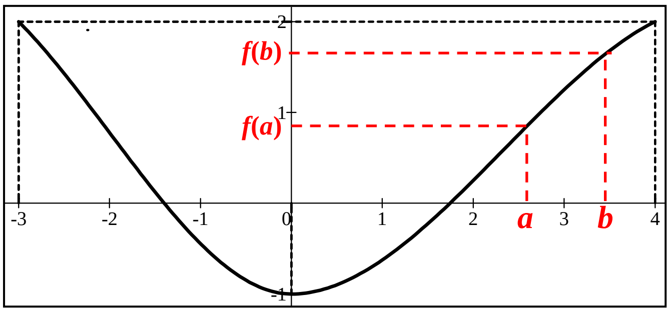
images

x	-3		-2		1		2		4		5
$f(x)$	0	↗	3	↘	-1	↗	2	↘	-2	↗	0

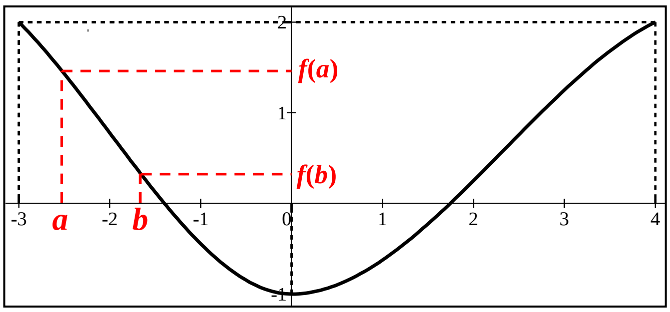
b) Variations d'une fonction.

Définition.
Soit f une fonction :

On dit que f est **croissante** lorsque pour tous nombres a et b tels que $a < b$, leurs images vérifient $f(a) < f(b)$. Cela signifie que lorsque x augmente, son image $f(x)$ augmente aussi.



On dit que f est **décroissante** lorsque pour tous nombres a et b tels que $a < b$, leurs images vérifient $f(a) > f(b)$. Cela signifie que lorsque x augmente, son image $f(x)$ diminue.



Exemples.
▶1. Soit la fonction $f(x) = 3x + 4$. Soient a et b deux nombres tels que $a < b$, $3a + 4 < 3b + 4$ donc $f(a) < f(b)$. La fonction $f(x) = 3x + 4$ est donc croissante.
▶2. Soit la fonction $g(x) = x^2$. Il faut distinguer deux cas, lorsque les nombres sont positifs et lorsque les nombres sont négatifs.
Soient a et b deux nombres tels que $0 \leq a < b$, $a^2 < b^2$ donc $f(a) < f(b)$. La fonction est donc croissante sur $[0,+\infty[$.
Soient a et b deux nombres tels que $a < b \leq 0$, $a^2 > b^2$ donc $f(a) > f(b)$. La fonction est donc décroissante sur $]-\infty,0]$.

c) Extrema d'une fonction.

Définition.

Le **minimum** $f(a)$ d'une fonction est la plus petite valeur prise par cette fonction :

$$\text{pour tout } x \in D_f,\ f(x) \geq f(a)$$

Le **maximum** $f(a)$ d'une fonction est la plus grande valeur prise par cette fonction :

$$\text{pour tout } x \in D_f,\ f(x) \leq f(a)$$

Exemples.

▶1. Soit la fonction $f(x) = x^2$

$f(0) = 0$ et pour tout x, $f(x) = x^2 \geq 0$

0 est donc le minimum de la fonction $f(x) = x^2$.

▶2. Démontrer que la fonction $g(x) = -x^2 + 2x + 2$ admet 3 pour valeur maximale.

On résout $g(x) = -x^2 + 2x + 2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 0$

Donc $x = 1$, soit $g(1) = -1^2 + 2 + 2 = 3$.

De plus pour tout x, on étudie le signe de $g(x) - 3$ soit $g(x) - g(1) = -x^2 + 2x + 2 - 3 = -(x-1)^2 \leq 0$

Donc pour tout x, $g(x) \leq 3$.

La fonction g admet donc 3 pour maximum et il est atteint en $x = 1$.