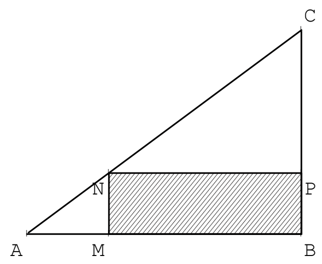
Activité : généralités sur les fonctions

Soit le triangle ABC rectangle en B avec AB = 4 cm et BC = 3 cm.
Le point N est un point du segment [AC].
La perpendiculaire à (AB) qui passe par N coupe [AB] au point M.
La perpendiculaire à (BC) qui passe par N coupe [BC] au point P.
Le quadrilatère NPBM obtenu est un rectangle.
Déterminons pour quelle position de N sur [AC] l'aire du rectangle NPBM est maximale.



On pose x = AN. On notera Aire(x), l'aire du rectangle NPBM.
Par Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B, $AC^2 = 9+16=25$ donc AC = 5 cm.
Remarquons que comme N se trouve sur le segment [AC] alors x ne peut varier qu'entre 0 et 5 cm.
$\mathcal{A}(x) = \mathrm{MB} \times \mathrm{MN}$.

M∈[AB], N∈[AC] et (MN)//(BC) donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$
Application numérique : $\frac{\mathrm{AM}}{4} = \frac{x}{5} = \frac{\mathrm{MN}}{3}$
donc $\mathrm{MN} = \frac{3x}{5}$ et $\mathrm{AM} = \frac{4x}{5}$.
On en déduit que $\mathrm{MB} = 4 - \mathrm{AM} = 4 - \frac{4x}{5} = \frac{20-4x}{5}$.

Et donc $\mathcal{A}(x) = \mathrm{MN} \times \mathrm{MB} = \frac{3x}{5} \times \frac{20-4x}{5} = \frac{3x(20-4x)}{25} = \frac{60x-12x^2}{25} = \frac{60x}{25} - \frac{12x^2}{25} = \frac{12x}{5} - \frac{12x^2}{25}$
L'aire du rectangle MNPB est donc fonction de x.

$$\mathcal{A}: \begin{array}{ccc} [0\,;5] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{12x}{5} - \frac{12x^2}{25} \end{array}$$

x est la **variable** — **l'image de x** par la fonction $\mathcal{A}$

Cette fonction $\mathcal{A}$ est un procédé qui lie la position de N sur [AC] à l'aire du rectangle MNPB.
Autrement exprimé, c'est un procédé qui à chaque x fait correspondre un réel $\frac{12x}{5} - \frac{12x^2}{25}$.

A l'aide de cette fonction on peut déterminer rapidement l'aire de MNPB en fonction de x.
Par exemple : si N est situé à un cm de A, on a : $\mathcal{A}(1) = \frac{12\times1}{5} - \frac{12\times1^2}{25} = \frac{12}{5} - \frac{12}{25} = \frac{24}{10} - \frac{48}{100} = 1{,}92\text{cm}^2$

x	0	1	1,5	2	2,5	3	4	4,5	5
$\mathcal{A}(x)$	0	1,92	2,52	2,88	3	2,88	1,92	1,08	0

Pour tracer la courbe représentative de $\mathcal{A}$ dans un repère orthogonal, on associe à chaque colonne du tableau un point, le x nous donne son abscisse et le $\mathcal{A}(x)$ son ordonnée. Puis on relie les points obtenus.

Remarque : plus on fait de point avant de les relier plus la courbe est « réaliste ».

La courbe nous permet de retrouver sans calcul des images, des antécédents et ici l'extrémum (l'aire maximale est atteinte pour x=2,5 et elle est de 3cm²). Il faut garder en tête que l'approche graphique est approximative.