Exercices : Généralités sur les fonctions

Ex1

Exprimez-y en fonction de x dans les expressions suivantes :

$\frac{1}{x} + y = x$	$2x + 3y - 5 = 0$	$\frac{2}{x} + \frac{y}{3} = 0$	$xy = 2$
$y = x + \frac{1}{x}$	$2x - 5 = -3y$	$\frac{2}{x} = -\frac{y}{3}$	$y = \frac{2}{x}$
	$\frac{2x-5}{-3} = y$	$-3 \times \frac{2}{x} = y$	

Pour un bonus consultez la fin du document

Ex 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = 3x² - 2

1) Calculez les images par f des réels -1 ; 0 ; 2 ; $\sqrt{3}$
2) Calculez les images par f des réels a ; 2a ; $\frac{a}{3}$
3) Déterminez les antécédents (s'ils existent) des réels suivants : 0 ; 25 ; -2 et -10

1) Et 2) f(-1) = 3×(-1)²-2 = 1 f(0) = 3×0²-2 = -2 f(2) = 3×2²-2 = 10
f($\sqrt{3}$) = 3×$\sqrt{3}$²-2 = 7 f(0) = 3a²-2 f(2a) = 3×(2a)²-2 = 12a²-2

f($\frac{a}{3}$) = 3×($\frac{a}{3}$)²-2 = $\frac{a^2}{3} - 2$

3) f(x)=0 ⇔3x² - 2 = 0 ⇔ x² = $\frac{2}{3}$ ⇔ x = $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou x =-$\sqrt{\frac{2}{3}}$

f(x) = 25 ⇔3x² - 2=25 ⇔3x² = 27 ⇔ x² = 9 ⇔ x = 3 ou x = -3

f(x) = -2 ⇔ 3x² - 2 = -2 ⇔3x² = 0 ⇔ x² = 0 ⇔ x = 0 (solution double)

Ex 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = $\frac{1}{x^2+2}$

1) Calculez les images par f des réels -2 ; 0 ; 1 ; $\sqrt{2}$;$\frac{a}{2}$; $\sqrt{a}$ (avec a>0)
2) Déterminez les antécédents (s'ils existent) des réels suivants : -1 ; 25 ;$\frac{1}{5}$

1) f(-2) = $\frac{1}{(-2)^2+2} = \frac{1}{6}$ f(x) = $\frac{1}{0^2+2} = \frac{1}{2}$ f(x) = $\frac{1}{1^2+2} = \frac{1}{3}$
f($\sqrt{2}$) = $\frac{1}{(\sqrt{2}\,)^2+2} = \frac{1}{4}$ f(x) = $\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2+2} = \frac{1}{\frac{a^2+8}{4}} = \frac{4}{a^2+8}$ f(x) = $\frac{1}{\sqrt{a}^2+2} =$
$\frac{1}{a+2}$

2) -1 n'a pas d'antécédent car on a une fraction dont les numérateurs et dénominateurs sont toujours positifs.
25 n'a pas d'antécédent car le dénominateur est toujours plus grand que le numérateur donc la fraction ne peut être que plus petite que 1
f(x) = $\frac{1}{5}$ ⇔ $\frac{1}{x^2+2} = \frac{1}{5}$ ⇔5 = x² + 2 ⇔ 3 = x² ⇔ x = $\sqrt{3}$ = x = $-\sqrt{3}$

Ex 4

Déterminez les ensembles de définition des fonctions suivantes :

f(x) = 5x -4 g(x) = 5x - $\sqrt{x}$ h(x) = $\frac{1}{x} + 4$ j(x) = $\frac{1}{4+x}$
k(x) = 3+ $\sqrt{8+x}$ m(x) = $\frac{5}{x+2} - \frac{7}{3-x}$ n(x) = $\sqrt{5-x} - \sqrt{8+x}$

$D_f = \mathbb{R}$ $D_g = [0; +\infty[$ $D_h = \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $D_h = \mathbb{R}\backslash\{-4\}$
$D_k = [-8; +\infty[$ $D_h = \mathbb{R}\backslash\{-2; 3\}$ $D_n = [-8; 5]$

Remarque : *on peut utiliser les symboles* ∪ *(Union) et* ∩ *(intersection) ainsi*
$D_h =]-\infty\,; 0[\cup]0; +\infty[$ $D_n =]-\infty\,; 5] \cap [-8; +\infty[$

Ex 5

Soit f une fonction et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique. Traduisez par des égalités (du type y = f(x)) chacune des phrases suivantes.

1) $\mathcal{C}$ passe par le point de coordonnées (-2 ;5). f(-2) = 5
2) $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée -1. f(0) = -1
3) $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses respectives -2 et 3. f(-2) = f(3) = 0

Ex 6

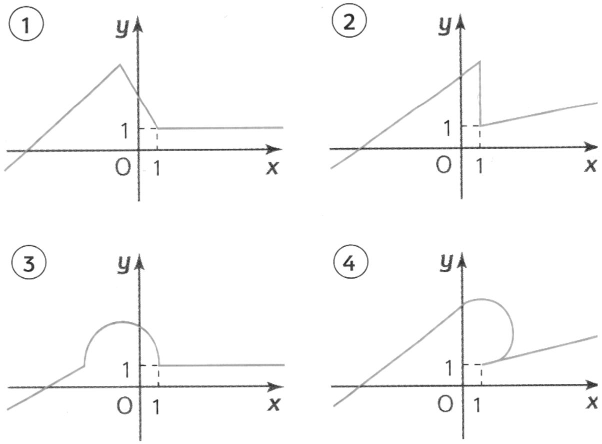
Soit f la fonction qui associe à x le réel $x^2 + 5$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative

1) Dire parmi les points suivants lesquels sont sur , A(-2 ;9), B(3 ;13) et C($\sqrt{2}$;7)
2) Donnez des coordonnées de 4 points de $\mathcal{C}$

1) $f(-2) = (-2)^2 + 5 = 9$ donc A(-2 ;9) $\in \mathcal{C}$ $f(3) = 3^2 + 5 = 14 \neq 13$ donc B(3 ;13)n'appartient pas à $\mathcal{C}$. $f(\sqrt{2}) = 7$ donc C($\sqrt{2}$;7) $\in \mathcal{C}$

2) D(0 ;5) ; E(1 ;6) ; F (10 ;105) ; G (-3 ;13)

Ex 7



Parmi les courbes suivantes, quelles sont celles qui ne sont pas des représentations de fonctions ? Expliquez pourquoi.

Les courbes 2 et 4 ne sont pas des représentations de fonctions car au moins une valeur (le 1 pour les deux courbes) a plusieurs images.

Ex 8

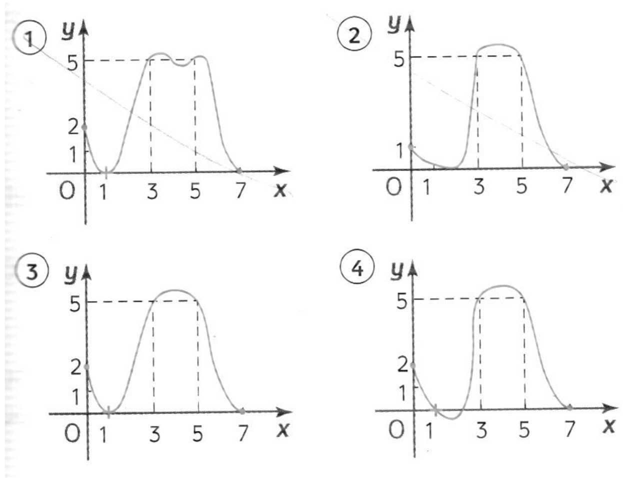
Parmi les courbes suivantes, retrouvez la courbe représentative de la fonction f sachant que : 1 a pour image 0 par f

0 a pour image 2 par f

5 est l'image de 3 et de 5 par f

Si $x \in [3 ;5]$, alors $f(x) \geq 5$

L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions.



Regardons les informations :

1 a pour image 0 par f	: ça élimine la courbe 2
0 a pour image 2 par f	: ça élimine (encore) la courbe 2
5 est l'image de 3 et de 5 par f	: ça n'élimine aucune courbe
Si $x \in [3 ;5]$, alors $f(x) \geq 5$	: ça élimine la courbe 1

L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions : ça élimine la courbe 4 (qui a trois sol.)

La seule courbe qui corresponde à toutes ces conditions est la troisième.

Bonus :

$5y - 3 = (y - 4)(x - 5)$	$(y-4)(2x-5)=(y-4)5$	$3y - 5(y-3x)=(3y-4)(2x+5)$
$5y -3 =xy -5y -4x +20$	$2xy-5y-8x+20=5y-20$	$3y-5y+15x=6xy+15y-8x-20$
$5y-xy+5y = 3+4x+20$	$2xy-5y-5y=8x-20-20$	$-2y-6xy-15y=-15x-8x+20$
$y(10-x) = 23+4x$	$y(2x-10)=8x - 40$	$y(-17-6x)=-23x+20$
$y=\frac{23+4x}{10-x}$	$y = \frac{8x-40}{2x-10}$	$y=\frac{-23+20}{-17-6x}$

$\frac{5}{y} = \frac{-8x}{3}$ donne en utilisant le produit en croix : $y = \frac{15}{-8x}$