Chapitre 6

Probabilités

I. Vocabulaire des probabilités

Une **expérience aléatoire** est une expérience pouvant être répétée dans des conditions identiques et dont l'issue n'est pas prévisible à priori.

Exemple : Le jet d'un dé est une expérience aléatoire.

Une **éventualité** ou un **cas possible** est le résultat d'une épreuve aléatoire.

Exemple : {1},{2},{3},{4},{5},{6} sont les éventualités de l'expérience aléatoire du jet de dé.

L'**univers** associé à une expérience aléatoire est l'ensemble des cas possibles d'une expérience aléatoire.
L'univers est généralement noté Ω.

Exemple : $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

Un **événement** est une partie de l'univers.

Exemple : l'événement A : « obtenir un nombre pair » correspond à l'ensemble {2,4,6}

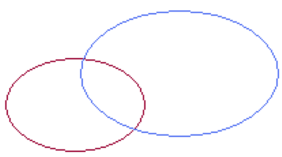
Un **événement élémentaire** est un événement réduit à un seul cas possible.

Exemple : « obtenir 6 » est un événement élémentaire, B= {6}.

II. lien entre les notions ensemblistes et probabiliste

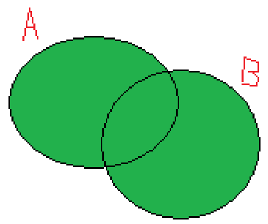
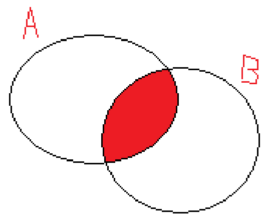
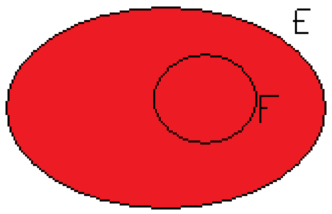
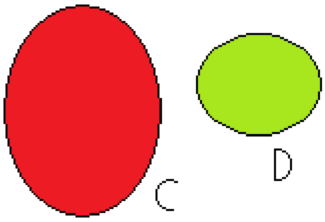
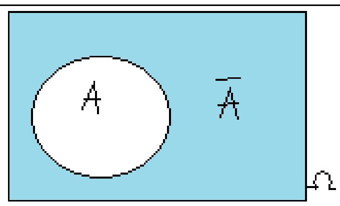
Dans ce chapitre on appellera diagramme de Venn de manière colloquiale (Par abus de notation) tous les schémas formés de courbes fermée.

Exemples :
Le schéma ci-contre est un 2-diagramme de Venn



Les diagrammes de Venn seront utilisés pour représenter l'univers des possibles et différents événement, ils permettent de clarifier nos perceptions des problèmes posés.

Utilisation des diagrammes de Venn pour représenter les relations entre les ensembles

vocabulaire probabiliste	vocabulaire ensembliste		diagramme de Venn	exemple
A ou B	A union B	$A \cup B$		A={2 ;3} B={3 ;4} $A \cup B = \{2\,;3\,;4\}$
A et B	A inter B	$A \cap B$		A={2 ;3} B={3 ;4} $A \cap B = \{3\}$
	F inclus dans E	$F \subset E$		F = {1 ;3} E={1 ;2 ;3}
C et D incompatibles	C et D disjoints	$C \cap D = \emptyset$		C={4 ;5 ;6} D={1 ;2}
événement contraire de A	complémentaire de A dans Ω	$\Omega \backslash A = \bar{A}$		A={2 ;3} $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$ $\bar{A} = \{1\,;4\,;5\,;6\}$

Remarque :

Attention à certaines petites subtilités de la langue française, suivant la manière dont il est intégré dans la phrase le ‘et’ peut rendre compte de l’union comme de l’intersection.

Exemple :

On s’intéresse à une population de Lycéens, et on considère deux ensembles A et B, avec A : « les élèves ayant un scooter », et B « les élèves vivant dans un village ».
« Les élèves ayant un scooter et vivant dans un village » correspond à l’ensemble $A \cap B$
« Les élèves ayant un scooter et les élèves vivant dans un village » correspond à l’ensemble $A \cup B$

III. Calculs de probabilités

Propriétés

Si on a un événement noté A alors P (A) sera la probabilité de réaliser l’événement A.
P(A) est d’un nombre compris entre 0 et 1 qui représente le pourcentage de réussite de l’événement A.
On dira qu’un évènement est certain si sa probabilité vaut 1 alors que l’on dira qu’un évènement est impossible si sa probabilité vaut 0.

Exemple

Ω l'univers est un événement certain : $P(\Omega) = 1 = 100\%$

Propriétés

Dans une situation d'équiprobabilité, on aura : $P(A) = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$

Exemple :

Si nous reprenons la série d'exemples du I, on aura : $P(A) = P(\{2{,}4{,}6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$

Ce qui signifie simplement que lorsque l'on lance un dé on a une chance sur deux d'obtenir un nombre impair !

Propriété

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Exemple :

Si nous reprenons notre précédent exemple, on aura : $\bar{A}$ l'événement contraire de A donc $\bar{A}$ correspond à l'événement « ne pas tirer un nombre pair », autrement dit « tirer un nombre impair » et $P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 50\%$. Ce qui signifie simplement que lorsque l'on lance un dé on a une chance sur deux d'obtenir un nombre pair !

Remarque :

Attention aux notations : $\overline{A \cup B}$ est l'événement contraire de ' A ou B ' (le complémentaire de l'union de A et de B), alors que $\bar{A} \cup B$ est l'événement contraire de A ou l'événement B (l'union du complémentaire de A et de B)

Remarque :

Cela signifie simplement que lorsque l'on lance un dé le résultat sera obligatoirement 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ou 6.

Propriété :

Soit A et B deux ensembles *(ou deux événements)* on a : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Démonstration

Soit A et B deux ensembles *(événement)*

soit $x \in \overline{A \cup B}$ donc $x \notin A \cup B$ donc $x \notin A\ et\ x \notin B$ donc $x \in \bar{A}$ et $x \in \bar{B}$ donc $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ *(x serait une éventualité)*

Ainsi $\forall x \in \overline{A \cup B}$ on a $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ donc $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

soit $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ donc $x \in \bar{A}$ et $x \in \bar{B}$ donc $x \notin A\ et\ x \notin B$ donc $x \notin A \cup B$ donc $x \in \overline{A \cup B}$

Ainsi $\forall x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ on a $x \in \overline{A \cup B}$ donc $\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$ conclusion $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$

Propriété

Pour tout couple d'évènements A et B, on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exemple :

Si nous reprenons notre précédent exemple, on aura :

$P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = P(\{1 ; 2 ; 3\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = P(\{1 ;3\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ Donc $P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Propriété des probabilités :

La somme des probabilités de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire vaut 1.

Exemple :

Si on lance un dé et que l'on regarde le chiffre obtenu. Il y a 6 éventualités possibles : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6. On aura alors :

$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 1$

IV. Utilisation d'arbres (polycopié)

Point méthode : Faire un arbre

Lorsqu'une expérience aléatoire se déroule en plusieurs étapes, il peut être bon d'avoir un moyen de se représenter la situation. La manière la plus pratique est d'utiliser un arbre. Un arbre commence par un point/ nœud ou il ne s'est encore rien passé, à chaque nouvelle étape, le nœud bourgeonne et donne une ou plusieurs branches, à leurs extrémités on indique l'événement qui vient de se produire. S'il y a une étape suivante chaque fin de branche se mue en bourgeons et donne à son tour une ou plusieurs nouvelles branches.

Pour qu'un arbre soit cohérent et fonctionnel il faut respecter certaines règles, les évènements qui partent d'un même bourgeon réalisent une partition de l'ensemble des possibles : ils sont deux a deux d'intersection vide et l'union de tous ces événements couvre l'ensemble des possibles. Sur chaque branche on indiquera la probabilité de l'événement à l'extrémité.

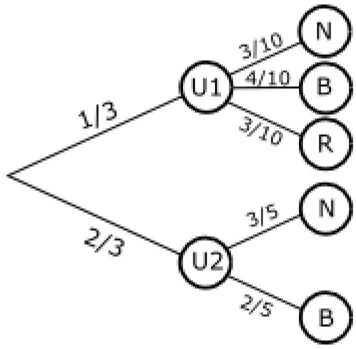
Pour calculer la probabilité d'arriver à l'extrémité d'une branche on multiplie les probabilités de la succession de branche permettant d'aller de l'origine à ce point.

Si un événement correspond à plusieurs extrémités, on ajoutera les probabilités correspondantes à chacune d'entre elles (voir point précédent).

Exemple :

On a deux urnes U_1 qui contient 3 boules noires, 4 blanches et 3 rouges, U_2 contient 3 boules noires et 2 blanches. On lance un dé, si on obtient un résultat inférieur ou égal à 2 on fera un tirage dans l'urne 1 sinon on tirera une boule de l'urne 2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire ?

Correction



On pose les événements suivants :
U1 : « sélectionner l'urneU_1 », U2 : « sélectionner l'urneU_2 »,
R : « tirer une boule rouge », B : tirer une blanche », R : « tirer une rouge »
L'arbre commence par deux événements U1 et U2.
On reporte les probabilités $P(U1) = \frac{1}{3}$ et $P(U2) = \frac{2}{3}$.
De chacun des événements partira autant de branches qu'il y a de possibilités.
On reporte les probabilités
Les 5 extrémités correspondent à des événements dont voici les probabilités :
$P(U1 \cap N) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$, $P(U1 \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{10} = \frac{2}{15}$, $P(U1 \cap R) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$,
$P(U2 \cap N) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$, $P(U2 \cap B) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$.
$P(N) = P(U1 \cap N) + P(U2 \cap N) = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Notation

Les branches allant de U1 à B et de U2 à B sont surmontées respectivement par 4/10 et 3/5, ce sont à chaque fois des probabilités de tirer une boule blanche, mais dans des cadres différents, la première correspond à la probabilité de tirer une boule blanche sachant que l'urne U_1 a été sélectionnée on la note $P_{U1}(B)$, la seconde correspond à la probabilité de tirer une boule blanche sachant que l'urne U_2 a été sélectionnée on la note $P_{U2}(B)$.

Remarque

On a donc ici : $\mathrm{P(U1 \cap B) = P(U1)} \times P_{U1}(B)$ et $\mathrm{P(U2 \cap B) = P(U2)} \times P_{U2}(B)$, et de manière générale on aura :

Propriété :

Soient A et B deux événements, la probabilité d'obtenir l'événement B sachant que A est réalisé sera notée : $P_A(B)$ et on aura : $P_A(B) = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(A)}}$

Remarques :

Certaines situation non séquentielles peuvent être vues comme des séquences pour nous arranger, par exemple on peut s'intéresser à la probabilité que quelqu'un ait un ticket T24 sachant que les références des tickets sont constituées de trois caractère une lettre (choisie parmi les 26 de l'alphabet) et deux chiffres (compris entre 0 et 9)
Ça nous donnerais un arbre avec 26 branches partant du premier nœud (chacune ayant une probabilité 1/26 d'être empruntée, chacune de ces branches donne 10 nouvelles branches (1er chiffre, chacune aura une probabilité de 1/10) qui chacune à leur tour donneront 10 nouvelles branches (chacune aura une probabilité de 1/10) ainsi P(« on a le ticket T24 »)=$\frac{1}{26} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{2600}$