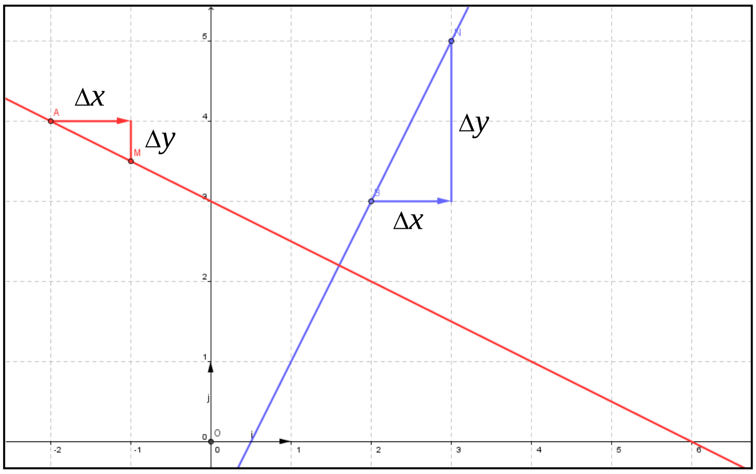
I. Etude des fonctions affines

Définition.
Toute fonction du type $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels donnés est appelée fonction affine.
Si $a = 0$ alors $f(x) = b$ est une fonction constante.
Si $b = 0$ alors $f(x) = ax$ est une fonction linéaire.

Propriété.
La fonction affine $f(x) = ax + b$ est représentée graphiquement par la droite d'équation $y = ax + b$ qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
a est le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine.

Exemple.

Tracer les représentations graphiques des fonctions :
$f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = -0{,}5x + 3$.



a est le coefficient directeur soit le rapport entre la différence entre les ordonnées Δy et la différence entre les abscisses Δx.

b est l'ordonnée à l'origine, la droite passe par le point de coordonnées $(0, b)$.

Propriété.
Si f est une fonction linéaire alors l'image $f(x) = ax$ et son antécédent x sont proportionnels.
Si f est une fonction affine alors l'accroissement des images est proportionnel à l'accroissement des antécédents.

Conséquence.
Soit x_1 et x_2, deux réels distincts et f une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$ alors le coefficient direteur a est $a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ et donc $f(x) = a(x - x_1) + f(x_1)$

Démonstration.

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{ax_1 + b - ax_2 - b}{x_1 - x_2} = \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = a$$
$$a(x - x_1) + f(x_1) = ax - ax_1 + ax_1 + b = ax + b = f(x)$$

Exemple.
Soit f la fonction affine telle que $f(2) = 5$ et $f(5) = 11$. Déterminer l'expression algébrique de f.
$a = \frac{5-11}{2-5} = \frac{-6}{-3} = 2$ et $f(x) = 2(x - 2) + 5 = 2x - 4 + 5 = 2x + 1$.

Théorème. Tableau de variations.
Soit une fonction affine $f(x) = ax + b$

- Si $a > 0$, f est strictement croissante

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↗	

- Si $a < 0$, f est strictement décroissante

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	

Théorème. Tableau de signe.

La fonction $f(x) = ax + b$ s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$ si $a \neq 0$

- Si $a > 0$,

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
$f(x)$	$-$		$+$

- Si $a < 0$,

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
$f(x)$	$+$		$-$

II. Les droites

Propriété.

L'équation $\alpha x + \beta y = \gamma$ (avec α et β non nuls simultanément) est l'équation d'une droite du plan, appelé **équation générale**.

L'équation $y = ax + b$ ou $x = c$ est l'équation d'une droite du plan, appelé **équation réduite**.

Remarque.

Chaque droite a une unique équation réduite, mais une infinité d'équations générales qui sont proportionelles.

Les différentes droites :

- $x = c$ ou $\alpha x + 0 \times y = \gamma$ est une droite verticale. Ce n'est pas la représentation graphique d'une fonction affine.
- $y = b$ ou $0 \times x + \beta y = \gamma$ est une droite horizontale. C'est la représentation graphique d'une fonction constante.
- $y = ax + b$ ou $\alpha x + \beta y = \gamma$ est une droite oblique. C'est la représentation graphique d'une fonction affine.

Exemples.

Donner l'équation réduite de l'équation $3x - 2y = 8$.

Donner une équation générale de la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$.

Tracer les droites $y = 2x - 1$, $y = -3x + 4$ et $y = 2x + 2$

Propriétés.

Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur ou elles sont verticales.

Propriétés.

La droite $\alpha x + \beta y = \gamma$ admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\beta \\ -\alpha\end{pmatrix}$. Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Exemple.

$2x + 3y = 4$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3 \\ -2\end{pmatrix}$.

$4x + 6y = 7$ admet pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}6 \\ -4\end{pmatrix}$, donc $\vec{v} = 2\vec{u}$ *i.e.* les droites sont parallèles.

Détermination algébrique de l'équation d'une droite connaissant deux points.
Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan, $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$.
Le coefficient directeur de la droite (AB) est $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
L'équation réduite de la droite (AB) est $y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A$.

Exemple.
A(2,3) et B(5,2) $y = \frac{2-3}{5-2}(x-2) + 3 = \frac{-1}{3}x + \frac{2}{3} + 3 = \frac{-1}{3}x + \frac{11}{3}$

III. Systèmes d'équations

□ Résolution algébrique.

a) Résoudre par la méthode de substitution le système : $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 1 - 2x \\ 5x + 2(1-2x) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x + 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

La solution est (2,–3).

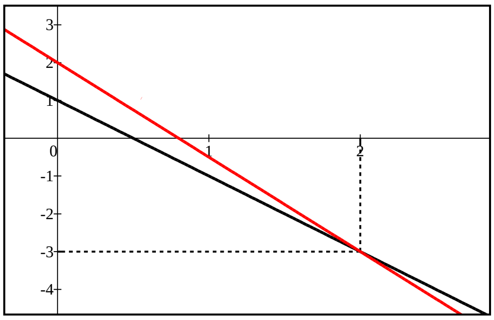
b) Résoudre par la méthode de combinaison le système : $\begin{cases} 3x + 2y = 1 & L_1 \\ 4x + 5y = 6 & L_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 12x + 8y = 4 & 4 \times L_1 \\ -12x - 15y = -18 & (-3) \times L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7y = -14 & 4 \times L_1 - 3 \times L_2 \\ 3x + 2y = 1 & L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

La solution est (–1,2).

□ Résolution graphique.

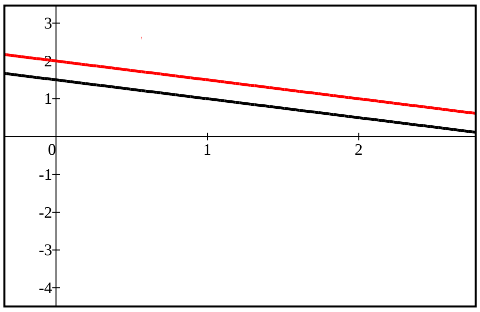
a) Résoudre graphiquement le système : $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$



Résoudre graphiquement le système revient à déterminer les coordonnées (x,y) du point d'intersection des deux droites d'équation $2x + y = 1$ et $5x + 2y = 4$ soit $y = 1 - 2x$ et $y = 2 - \frac{5}{2}x$

Lorsque les deux droites sont sécantes, le système possède une unique solution.

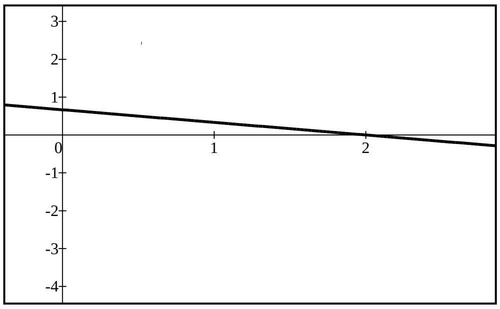
b) Résoudre graphiquement le système : $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases}$



Nous cherchons les coordonnées (x,y) du point d'intersection des deux droites $2x + 4y = 6$ et $3x + 6y = 12$ soit $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$ et $y = 2 - \frac{1}{2}x$.

Lorsque les deux droites sont strictement parallèles, le système ne possède aucune solution.

c) Résoudre graphiquement le système : $\begin{cases} 3x + 9y = 6 \\ 4x + 12y = 8 \end{cases}$



Nous cherchons les coordonnées (x,y) du point d'intersection des deux droites $3x + 9y = 6$ et $4x + 12y = 8$ soit $y = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x$ et $y = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x$.

Lorsque les deux droites sont confondues, le système possède une infinité de solutions.

IV. La fonction carrée $x \mapsto x^2$

Définition.
La fonction carrée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$.

Propriété. Sens de variation
La fonction carrée $f(x) = x^2$ est croissante sur $[0,+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty,0]$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^2$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Démonstration.

$$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

- si $0 < a < b$ alors $a - b < 0$ et $a + b > 0$ donc $(a - b)(a + b) < 0$ et donc $f(a) < f(b)$, f est donc croissante sur $]0,+\infty[$
- si $a < b < 0$ alors $a - b < 0$ et $a + b < 0$ donc $(a - b)(a + b) > 0$ et donc $f(a) > f(b)$, f est donc décroissante sur $]-\infty,0[$.

Définition. Parité d'une fonction.
Une fonction est **paire** lorsque pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$
Une fonction est **impaire** lorsque pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$

Propriété.
Une fonction est paire $\Leftrightarrow$ sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.
Une fonction est impaire $\Leftrightarrow$ sa courbe représentative admet l'origine pour centre de symétrie.

Exemples.
▶ 1. $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
$f(-x) = (-x)^2 = x^2$, la fonction carrée est paire, sa courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

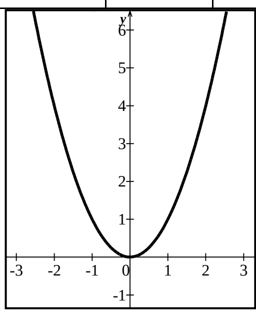
▶ 2. $g(x) = x^3$ définie sur $\mathbb{R}$.
$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$, la fonction cube est impaire, sa courbe est donc symétrique par rapport à l'origine.

▶ 3. $h(x) = 2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
$h(-x) = 2 \times (-x) + 1 = -2x + 1 \neq \pm h(x)$, la fonction h n'est ni paire, ni impaire.

Tableau de valeurs.

x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}75$	$-0{,}5$	$-0{,}25$	0	$0{,}25$	$0{,}5$	$0{,}75$	1	$1{,}5$
$f(x)$											

Courbe.
La fonction carrée est représentée par une parabole d'équation $y = x^2$.



Exemple.
Résoudre graphiquement $x^2 \leq 0{,}25$ puis $x^2 > 0{,}5$.

V. La fonction inverse $x \mapsto 1/x$

Définition.

La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ par $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Propriété. Sens de variation

La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty,0[$ et décroissante sur $]0,+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\searrow$	‖	$\searrow$

Démonstration.

$$f(a) - f(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$$

- si $0 < a < b$ alors $b - a > 0$ et $ab > 0$ donc $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0$ et donc $f(a) > f(b)$, f est donc décroissante sur $]0,+\infty[$
- si $a < b < 0$ alors $b - a > 0$ et $ab > 0$ donc $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0$ et donc $f(a) > f(b)$, f est donc décroissante sur $]-\infty,0[$.

Parité de la fonction inverse.

$f(-x) = \frac{1}{-x} = -f(x)$, la fonction inverse est impaire, sa courbe est donc symétrique par rapport à l'origine.

Tableau de valeurs.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$											

Courbe.

La fonction inverse est représentée par une hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

0 est une valeur interdite, il n'y a donc pas de point d'abscisse 0 sur la courbe.