Correction d'exercices sur les généralités de géométrie euclidienne.

Exercice 2P208
Attention on vous demande des propriétés et non des théorèmes
Figure 1 : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu
Figure 2 : un losange a ses diagonales perpendiculaires et qui se coupent en leur milieu.
Figure 3 : deux droites parallèles coupées par une troisième forment des couples d'angles alternes internes de même mesure.
Figure 4 : une droite passant par les milieux de deux des côtés d'un triangle est paralléle au troisième côté.

Exercice 4P208
1)a) La hauteur du triangle ABH issue de A est la droite qui passe par A et qui est perpendiculaire à (BH)
b) c'est la droite (AC)
c) c'est la droite (BC)
d) c'est le point de concours des trois hauteurs de ABH or on en connaît deux (AC) et (BC) qui se coupent en C donc C est l'orthocentre de ABH.
2) de même B est l'orthocentre de AHC et A est l'orthocentre de BHC.

Exercice 5 P208
1) et 2)

A) Si OA = 3cm alors A appartient au cercle de centre O et de rayon 3	vrai
B) Si IA = 3cm alors I est le milieu du segment [AB] de longueur 6cm	faux
C) Si (AB) // (DC) alors ABCD est un parallélogramme	faux
D) Si le symétrique de B par rapport à I est A alors I est le milieu de [AB]	vrai

Exercice 6 P208
1) Théorème de Pythagore
2) Si un point est sur la médiatrice d'un segment alors il est équidistant des extrémités de celui-ci.
3) Théorème de Thalès (attention au car)
4) Si un triangle admet un de ses côtés comme diamètre de son cercle circonscrit alors il est rectangle.

Exercice 7P209
1) Si le triangle est isocèle AOB est isocèle en O, alors OA = OB
Si le triangle est isocèle AOB est isocèle en O, alors O appartient à la médiatrice de [AB]
~~Si O appartient à la médiatrice de [AB] alors le triangle est isocèle AOB est isocèle en O~~ contre exemple si O,A,B alignés
Si O appartient à la médiatrice de [AB] alors OA = OB
Si OA = OB alors O appartient à la médiatrice de [AB]
~~Si OA = OB alors le triangle est isocèle AOB est isocèle en O~~ contre exemple si O,A,B alignés
Si O milieu de [AB] alors OA = OB
Si O milieu de [AB] alors AO + OB = AB
Si O milieu de [AB] alors O appartient à la médiatrice de [AB]
2) ~~le triangle est isocèle AOB est isocèle en O si et seulement si OA = OB~~
~~le triangle est isocèle AOB est isocèle en O si et seulement si O appartient à la médiatrice de [AB]~~
O appartient à la médiatrice de [AB] si et seulement si OA = OB

Exercice 10 P209
MNP est rectangle en P donc d'après le théorème de Pythagore on a : $MN^2 = PM^2 + PN^2$
Ainsi $MN^2 = 5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$ donc $MN = \sqrt{89} \approx 9,43$

Exercice 11P209

BC=$a\sqrt{2}$ AH $= \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (pythagore nous donne: AH $= \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$)

Exercice 12P209
Bla bla bal … $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 8^2 - 5^2 = 64 - 25 = 39$ donc AC=$\sqrt{39} \approx 6{,}24$cm

Exercice 14P209
BC est le plus grand des côtés du triangle,
d'une part $BC^2 = 3^2 = 9$ d'autre part $AC^2 + BC^2 = \sqrt{6}^2 + \sqrt{3}^2 = 6 + 3 = 9$
donc $BC^2 = AC^2 + BC^2$
donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore on peut affirmer que ABC est rectangle

Exercice 15P209
BC est le plus grand des côtés du triangle,
d'une part $BC^2 = 7^2 = 49$ d'autre part $AC^2 + BC^2 = (3\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 = 18 + 32 = 50$
donc $BC^2 \neq AC^2 + BC^2$
donc d'après la contraposée du théorème de Pythagore on peut affirmer que ABC n'est pas rectangle.

Exercice 17P209
MPN est rectangle en M et donc d'après le théorème de Pythagore :
$PN^2 = MP^2 + MN^2 = 24^2 + 32^2 = 1600 = 40^2$ donc PN = 40unités
Donc HP = 40 – 14 = 26 unités
Si H était le pied de la hauteur issue de M alors le théorème de Pythagore nous donnerai les égalités suivantes :
$MH^2 = MN^2 - NH^2$ et $MH^2 = MP^2 - PH^2$
Or $MN^2 - NH^2 = 24^2 - 14^2 = 380$ et $MP^2 - PH^2 = 32^2 - 26^2 = 348$ donc il y a une contradiction
Donc H ne peut pas être le pied de la hauteur issue de M.

Exercice 19P209
AMP est rectangle en A donc $MP^2=MA^2+AP^2 = 4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52$
Donc $MP = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$
Dans le triangle ABQ, la droite (MP) parallèle au côté (BQ) coupe les côtés (AB) en M et [AQ] en P donc d'après le théorème de Thalès nous avons : $\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AQ} = \frac{MP}{BQ}$, application numérique : $\frac{4}{12} = \frac{6}{AQ} = \frac{2\sqrt{13}}{BQ}$
et plus particulièrement : $\frac{4}{12} = \frac{2\sqrt{13}}{BQ}$ donc BQ =$6\sqrt{13}$

Exercice 20P209
$\frac{AC}{AN} = \frac{1{,}7}{2{,}5} = \frac{6{,}8}{10} = 0{,}68$ et $\frac{AB}{AM} = \frac{2{,}2}{3} \approx 0{,}73 \neq 0{,}68$
Donc d'après la contraposée du théorème de Thalès (ou d'après le théorème de Thalès lui-même si vous préferez) on peut dire que les droites (CB) et (MN) ne sont pas parallèles.

Exercice 21P210
Il y a une erreur sur la figure, en fait Q est sur [AB] et juste sous Q'.
1)Les droites (PP'), (QQ') , (RR') et (MB) sont toutes deux à deux parallèles de plus P',Q' et R' sont sur [AM] et P,Q,R sont sur [AB] donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{AP'}{AM} = \frac{AP}{AB} = \frac{2}{8} = 0{,}25$, $\frac{AQ'}{AM} = \frac{AQ}{AB} = \frac{4}{8} = 0{,}5$ et $\frac{AR'}{AM} = \frac{AR}{AB} = \frac{7}{8} = 0{,}875$
2) Je peux placer S sur [AB] à 6 carreaux de A et S' sur l'intersection entre la droite verticale passant par S et le segment [AB].

Exercice 23P210

1) Soit le triangle BIM, $A \in (BI)$ et $P \in (MI)$,Les droites d et d' étant parallèles (AP) // (BM) et donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{AI}{BI} = \frac{IP}{IM} = \frac{AP}{BM}$

Soit le triangle BJM, $A \in [JB]$ et $N \in [MJ]$, les droites d et d' étant parallèles (AN) // (BM) et donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{AJ}{BJ} = \frac{JN}{JM} = \frac{AN}{BM}$ or AN = AP donc $\frac{2}{5} = \frac{AJ}{BJ} = \frac{AP}{BM}$ or on sait que $\frac{AI}{BI} = \frac{AP}{BM}$ donc $\frac{2}{5} = \frac{AJ}{BJ} = \frac{AI}{BI}$

2) on place M' sur d' à la quatrième graduation et N' sur d à la troisième graduation, et on place P' symétrique de N' par rapport à P'. On appelle K le point d'intersection entre (AB) et (M'P') et L celui entre (AB) et (M'N'). Par un raisonnement analogue à celui tenu lors de la première question on peut montrer que $\frac{3}{4} = \frac{AK}{BK} = \frac{AL}{BL}$.

Exercice 24P210

Conjecture IJKL est un parallélogramme

I et L étant les milieux de [AB] et [AD] un des théorèmes des milieux nous donne : (IL) // (BD)

J et K étant les milieux de [CB] et [CD] un des théorèmes des milieux nous donne : (JK) // (BD)

Comme (BD) est parallèle à (IL) et (JK) on peut en déduire que ces deux dernières sont parallèles entre elles.

I et J étant les milieux de [AB] et [BC] un des théorèmes des milieux nous donne : (IJ) // (AC)

L et K étant les milieux de [AD] et [CD] un des théorèmes des milieux nous donne : (LK) // (AC)

Comme (AC) est parallèle à (IJ) et (LK) on peut en déduire que ces deux dernières sont parallèles entre elles.

Nous avons donc un quadrilatère IJKL dont les côtés sont deux à deux parallèles c'est donc un parallélogramme.

Exercice 26P210

1) EFBA étant un carré IEK sera un triangle rectangle, donc d'après le théorème de Pythagore :

$IK = \sqrt{EI^2 + EK^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ cm

2) De la même manière $IJ = JK = 3\sqrt{2}$ cm

3) On doit donc tracer un triangle équilatéral de côté $3\sqrt{2}$cm, il est impossible de trouver cette mesure exacte sur notre règle , donc on commencera par tracer un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit mesurent 3cm, ce triangle aura un hypoténuse mesurant exactement $3\sqrt{2}$cm, il ne nous restera qu' a reporter cette mesure trois fois de suite pour tracer notre triangle.

Nous savons grâce à l'exercice qu'un triangle équilatéral de côté a, a une hauteur de $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ donc la hauteur de IJK sera de $3\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

Ainsi l'aire du triangle sera $\frac{base \times hauteur}{2} = \frac{3\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{9\sqrt{12}}{4} = \frac{9\times2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

Exercice 43P213

Pour vérifier si les points E, D et F sont alignés je vais calculer les distances ED , DF et EF et la comparaison des valeurs de ED+DF et EF me permettrons de conclure.

OBDC étant un rectangle, Cet B étant respectivement sur les segments [EO] et [OF], on peut conclure que les triangles EOF, ECD et DBF sont rectangles respectivement en C et en B, et donc d'après le théorème de Pythagore on a : $EF^2 = (8+18)^2+(11+25)^2 = 1972$, $ED^2=EC^2+CD^2=8^2+11^2 = 185$ et $DF^2 = DB^2 + BF^2 = 18^2 + 25^2 = 949$.

Nous avons donc EF = $\sqrt{1972}$, ED= $\sqrt{185}$, DF = $\sqrt{949}$, or $\sqrt{1972} \neq \sqrt{185}+\sqrt{949}$ donc les trois points ne sont pas alignés.

Exercice 44P213

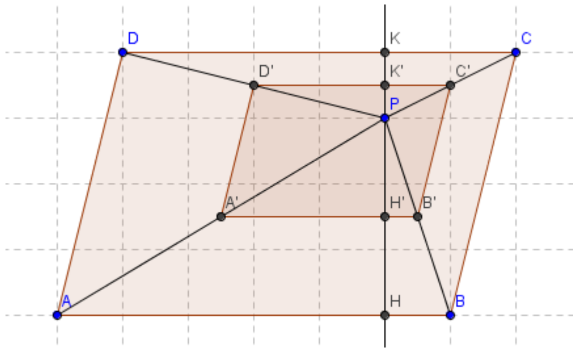
Pour que l'exercice soit faisable, il faut rajouter deux hypothèses : COB et DAB sont rectangles respectivement en O et en A.

Je vais déterminer les angles $\widehat{OBC}$ et $\widehat{OBD}$ et leur comparaison me permettra de conclure sur l'alignement de B, D et C.

Les triangles COB et DAB étants rectangles respectivement en O et en A, on aura $\widehat{OBC} = tan^{-1}\left(\frac{OC}{OB}\right) \approx 32{,}15°$ et $\widehat{OBD} = tan^{-1}\left(\frac{AD}{AB}\right) \approx 31{,}89°$ donc $\widehat{OBC} \neq \widehat{OBD}$ et donc les points C, D et B ne sont pas alignés.

Exercice 45P213

2)
A' et B' sont les milieux respectifs de [AP] et [BP] or « si un segment a pour extrémités les milieux de deux des côtés d'un triangle alors sa mesure est la moitié de celle du troisième côté », donc A'B' = ½ AB



3)
de la même manière on peut montrer que C'B' = ½ CB, A'D' = ½ AD, C'D' = ½ CD.
ABCD est un parallélogramme or « un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses côtés sont deux à deux de même mesure » (théorème alpha) donc AB = CD et BC = AD.
Ainsi A'B' = ½ AB , C'D' = ½ CD et AB = CD donc A'B' = C'D' et de la même manière B'C' = A'D' donc d'après le théorème alpha A'B'C'D' est un parallélogramme.
4) A'B' = ½ AB ,C'B' = ½ CB, A'D' = ½ AD, C'D' = ½ CD donc $P_{A'B'C'D'} = A'B' + B'C' + C'D' + A'D'$ = ½ AB + ½ CB+ ½ AD+ ½ CD = ½ (AB+BC+CD+DA) = $\frac{1}{2}P_{ABCD}$
5) a) soit H' et K' les points d'intersections entre (HK) et respectivement (A'B') et (C'D')
Plaçons-nous dans PBH, (H'B') coupe [PB] en B' son milieu en étant parallèle à (HB) , or « si une droite coupe un côté d'un triangle en son milieu en étant parallèle à un second côté alors elle coupera le troisième côté de ce triangle en son milieu » donc H' est le milieu de [PH] et donc PH' = ½ PH , de la même manière PK' = ½ PK
Ainsi h'=H'K' = HP+PK = ½ PH+½ PK = ½ (HP + PK) = ½ HK =1/2 h , donc la hauteur du petit parallélogramme est la moitié de celle du grand.
b) $\mathcal{A}_{A'B'C'D'} = A'B' \times h' = \frac{1}{2}AB \times \frac{1}{2}h = \frac{1}{4}AB \times h = \frac{1}{4}\mathcal{A}_{ABCD}$

Exercice 45P213

1) ABCD est un parallélogramme donc non seulement la somme de ses angles vaut 360° mais en plus ses angles opposés sont deux à deux de même mesure, donc $2\widehat{DAB} + 2\widehat{ABC} = 360°$ et donc $\frac{1}{2}\widehat{DAB} + \frac{1}{2}\widehat{ABC} = 90°$.
De plus [AO) et [BO) étant les bissectrices des angles $\widehat{DAB}$ *et* $\widehat{ABC}$ on aura :
$\widehat{OAB} + \widehat{ABO} = \frac{1}{2}\widehat{DAB} + \frac{1}{2}\widehat{ABC} = 90°$.
Dans le triangle OAB, on aura $\widehat{AOB} = 180 - \left(\widehat{OAB} + \widehat{ABO}\right) = 180 - 90 = 90°$ le triangle OAB est donc rectangle en O
2)
Si ABCD est rectangle alors $\widehat{OAB} = \widehat{ABO} = \frac{1}{2}\widehat{DAB} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = 45°$. Donc AOB est isocèle en plus d'être rectangle donc OA =OB
3) si l'on considère le triangle ABE, la droite (AO) est à la fois la bissectrice de $\widehat{DAB}$ et la hauteur issue de A donc elle partage ABE en deux triangles ABO et AOE rectangles tous les deux en O.
On a $\widehat{ABO} = 180° - \widehat{OAB} - 90° = 180° - \widehat{OAE} - 90° = \widehat{OEA}$
Le triangle BAE a donc les angles à sa base [BE] qui sont égaux donc il est isocèle en A et donc AB=AE.