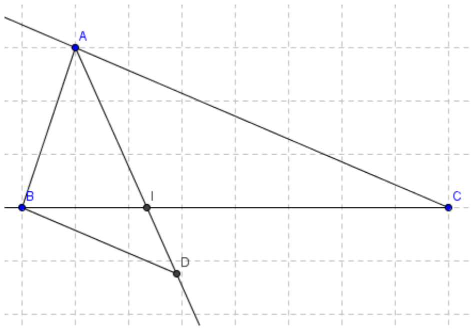
Correction du devoir maison
à rendre pour avant les vacances d'hiver

Exercice 64P216

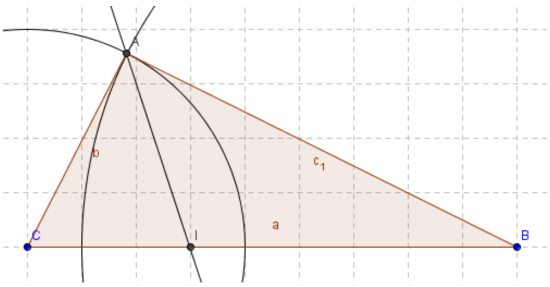
Partie A



2) et 3) le logiciel me donne : BI = 2,35cm IC = 5,65cm AC = 7,62cm AB = 3,16cm

en utilisant le logiciel de géométrie, les tracés sont parfaits, mais les mesures sont arrondies au centième et on obtient $\frac{IB}{IC} \approx 0{,}416$ et $\frac{AB}{AC} \approx 0{,}415$, les rapports sont donc presque égaux.
4) On peut penser que la différence est elle due à l'arrondi des mesures. Donc la conjecture est : si ABC est un triangle et I le point d'intersection entre [BC] et la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ alors on aura : $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$
Remarque : la conjecture est une généralisation de ce que l'on observe sur notre figure à tout triangle ABC, On ne la sort pas de notre chapeau : ce que l'on sait c'est que l'on n'avait pas de consigne particulière pour notre triangle, donc si on recommence avec un triangle complètement différent il y a de forte chance pour que l'on observe la même propriété, et donc celle-ci est sans doute vraie pour tout triangle

Partie B

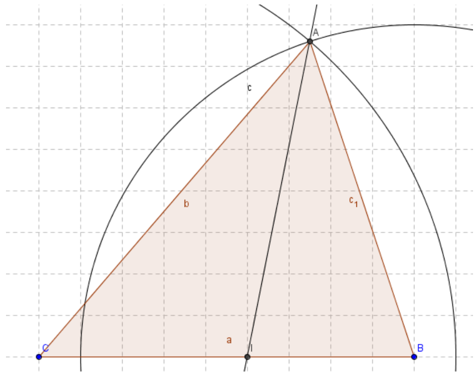


D'après la conjecture $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$ donc $\frac{IB}{IC} = \frac{8}{4}$ donc IB = 2IC
BC = IB + IC donc BC = 2IC + IC donc BC = 3IC et donc IC = $\frac{1}{3}$BC
Donc IC doit être sur [BC] à 3cm de C.
La figure semble le confirmer

Partie C

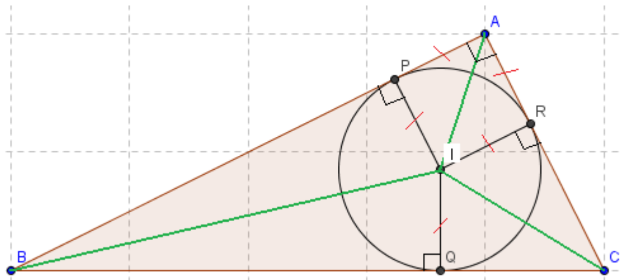
1) Les droites (BC) et (AD) se coupent en I de plus (BD) // (AC) donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{IB}{IC} = \frac{IA}{ID} = \frac{BD}{AC}$ et plus particulièrement $\frac{IB}{IC} = \frac{BD}{AC}$
2) Les deux droites parallèles (BD) et (AC) sont coupées par une même sécante : (AD) donc les angles alternes internes $\widehat{DAC}$ et $\widehat{BDA}$ sont égaux.
On sait que [AI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ donc on a : $\widehat{DAC} = \widehat{DAB}$
On a donc $\widehat{DAC} = \widehat{DAB}$ et $\widehat{DAC} = \widehat{BDA}$ donc $\widehat{DAB} = \widehat{BDA}$ et donc BDA est isocèle en B et donc AB = BD.
3) Ainsi : AB = BD et $\frac{IB}{IC} = \frac{BD}{AC}$ donc $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$
La conjecture est bien prouvée : **Si dans ABC la bissectrice de $\widehat{CAB}$ coupe [BC] en I alors $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$**

Partie D



Je trace deux cercles un de centre B et de rayon 8cm et l'autre de centre C et de rayon 10cm.
Ils se coupent en deux points, on notera n'importe lequel des deux A.
Vérifions que I le point situé sur [BC] à 4cm de A est bien le point d'intersection entre la bissectrice
La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe [BC] en I', et on doit donc avoir
$\frac{I'B}{I'C} = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{10} = 0{,}8$ et I' sur BC ainsi I'B=I'C×0,8
donc BC = I'B + I'C = 1,8×IC' et donc $IC' = \frac{BC}{1{,}8} = 9 \div 1{,}8 = 5$cm
et donc I'A = 4cm or I est sur [BC] or IA = 4cm donc I et I' sont confondus. Le point A est donc bien placé.

Exercice 66P217



2)
Le quadrilatère RIPA a trois angles droits et deux côtés consécutifs [PI] et[IR] de même mesure c'est donc un carré.
3) a)R est sur [CA] donc CA = AR + RC donc b = r + CR
Donc CR = b – r
b) P est sur [BA] donc BA = AP + PB donc c = r + BP
Donc BP = c – r
c) I est le centre du cercle inscrit donc c'est le point de concours des trois bissectrices de ABC donc [BI) et [CI) sont les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$ et donc d'après le résultat préliminaire on aura : PB = BQ et QC = RC
ainsi a = BC= BQ + QC = BP + CR = c – r + b – r donc a= (b-r) + (c-r) et b + c – a = 2r
4a)
Le triangle ABC est rectangle en A donc $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{b \times c}{2}$
b)
$\mathcal{A}_{AIB} = \frac{AB \times PI}{2} = \frac{c \times r}{2}$ $\qquad \mathcal{A}_{BIC} = \frac{BC \times IQ}{2} = \frac{a \times r}{2}$ $\qquad \mathcal{A}_{AIC} = \frac{AC \times IR}{2} = \frac{b \times r}{2}$
Donc
$\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{AIB} + \mathcal{A}_{BIC} + \mathcal{A}_{AIC} = \frac{c \times r}{2} + \frac{a \times r}{2} + \frac{b \times r}{2} = \frac{(a+b+c) \times r}{2}$
Donc d'après le a : $\frac{(a+b+c) \times r}{2} = \frac{b \times c}{2} \Leftrightarrow (a+b+c) \times r = b \times c \Leftrightarrow a+b+c = \frac{b \times c}{r}$
5)
$\begin{cases} (a+b+c) \times r = b \times c \\ \mathrm{b + c - a = 2r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b+c) \times 2r = 2b \times c \\ \mathrm{b + c - a = 2r} \end{cases} \Rightarrow (b+c+a) \times (\mathrm{b + c - a}) = 2b \times c$
$\Rightarrow ((b+c)+a) \times ((\mathrm{b + c}) - \mathrm{a}) = 2b \times c \Rightarrow (\mathrm{b + c})^2 - \mathrm{a}^2 = 2b \times c$
Autre méthode plus rapide :
$(\mathrm{b + c})^2 - \mathrm{a}^2 = ((b+c)+a) \times ((\mathrm{b + c}) - \mathrm{a})$ or on a montré que :
$(b+c)+a = \frac{b \times c}{r}$ et que b + c – a = 2r donc $(\mathrm{b + c})^2 - \mathrm{a}^2 = \frac{b \times c}{r} 2\mathrm{r} = 2\mathrm{bc}$ CQFD
6) $(\mathrm{b + c})^2 - \mathrm{a}^2 = 2b \times c \Leftrightarrow (\mathrm{b + c})^2 - 2\mathrm{bc} = \mathrm{a}^2 \Leftrightarrow \mathrm{b}^2 + 2\mathrm{bc} + \mathrm{c}^2 - 2\mathrm{bc} = \mathrm{a}^2 \Leftrightarrow \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2 = \mathrm{a}^2$
On vient de prouver que si le triangle est rectangle alors le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des deux autres côtés.