

I. Représentation en perspective cavalière

Définition :

La **perspective cavalière** est une technique de représentation de l'espace sur un support plat (tableau, feuille, etc.). Elle suit les règles suivantes :

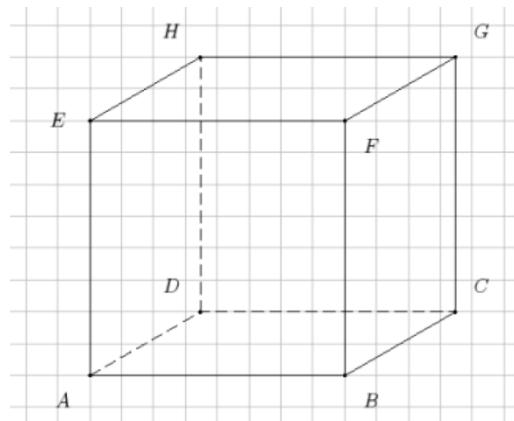
- Les plans parallèles au support choisi (appelé **plans frontaux**) sont représentés en vraie grandeur ;
- toute droite perpendiculaire aux plans frontaux (appelée **fuyante**) sont représentées par des droites faisant avec l'horizontale un angle α donné ;
- sur les fuyantes, les longueurs sont multipliées par un rapport de réduction k donné ;
- les lignes cachées sont représentées en **pointillés**.

Exemple :

Sur la figure ci-dessus, on a choisi $\alpha = 30^\circ$ et $k = \frac{1}{2}$.

La figure représentée est le cube $ABCDEFGH$.

- les faces $ABFE$ et $DCGH$ sont situés dans des **plans frontaux** ;
- les droites (AD) , (EH) , (FG) et (BC) sont des **fuyantes**. Elles sont **perpendiculaires aux plans frontaux** mais sont **représentées** comme faisant **un angle de 30°** avec l'horizontale ;
- la figure étant un cube, on a $AE = EH$, mais dans la **représentation**, on a $EH = \frac{1}{2}AE$.



Propriété :

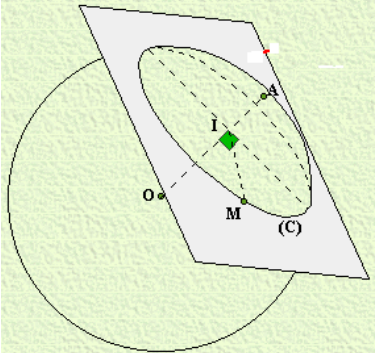
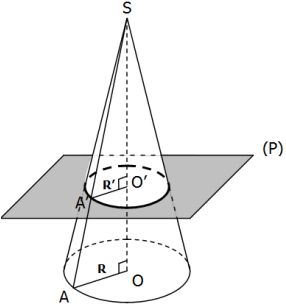
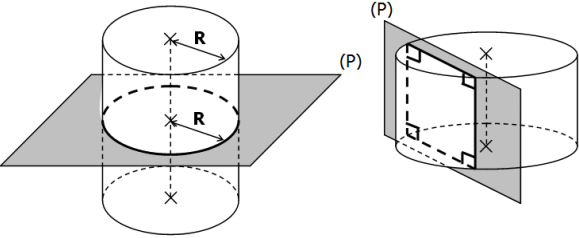
Lors d'une représentation en perspective cavalière, l'alignement, le parallélisme, les rapports de longueur de segments parallèles et les milieux sont conservés.

Remarque :

Par contre, les mesures des angles ne sont pas conservées (sauf dans les plans frontaux).

II. Solides usuels : volume et section par un plan

Pavé droit	Pyramide	Tétraèdre
$V = abc$ Si le plan P est parallèle à une arête, la section est un rectangle.	$V = \frac{1}{3} \text{Base} \times \text{hauteur}$ Si P est parallèle à la base, la section est un polygone dont les côtés sont parallèles à ceux de la base.	$V = \frac{1}{3} \text{Base} \times \text{hauteur}$ Si P est parallèle à l'une des faces, la section est un triangle dont les côtés sont parallèles à ceux de la base.

Sphère	cône de révolution	cylindre de révolution
		
$V = \frac{4}{3} \pi R^3$ La section est un cercle. Si [OA] est le diamètre de la sphère, orthogonal au plan P en I, alors I est le centre du cercle.	$V = \frac{1}{3} (\pi R^2) \times h$ Si P est parallèle à la base, la section est un cercle dont le centre se trouve sur l'axe du cône.	$V = \pi R^2 \times \text{hauteur}$ • Si P est parallèle aux bases, la section est un cercle de même rayon que le cylindre et dont le centre se trouve sur l'axe du cylindre. • Si P est parallèle à l'axe, la section est un rectangle.

III. Règles d'incidence

Règle 1 :

Par trois points non alignés A, B et C passe un seul plan. Ce plan est noté (ABC).

Règle 2 :

Si A et B sont deux points d'un plan P, tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan P.

Règle 3 :

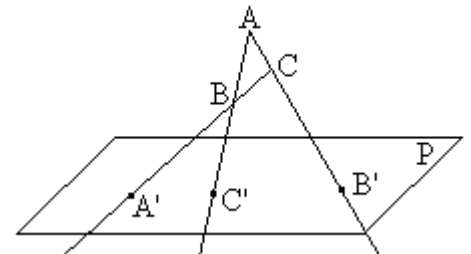
Si deux plans sont sécants, leur intersection est une droite.

Règle 4 :

Dans un plan donné tous les théorèmes de géométrie plane sont utilisables

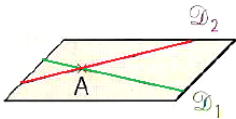
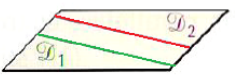
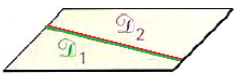
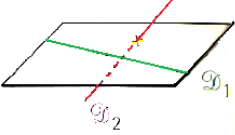
Exercice :

P est un plan ; A, B, C sont trois points non alignés qui n'appartiennent pas à P. On suppose que (AB) coupe P en C', que (AC) coupe P en B' et que (BC) coupe P en A'. Montrer que les points A', B' et C' sont alignés.

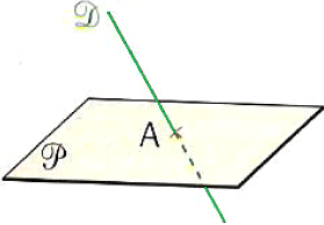
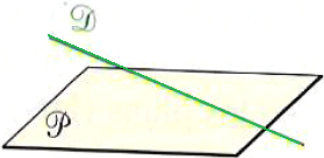



IV. Position relative de droites et de plans

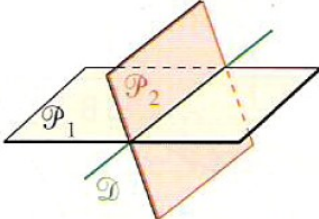

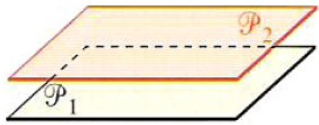
a) deux droites distinctes

Positions relatives de \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2			
Coplanaires			Non coplanaires
sécantes	strictement parallèles	confondues	
			
un point commun unique	pas de point commun	tous les points sont communs	il n'existe pas de plan contenant les deux droites

b) Une droite et un plan

Positions relatives de \mathcal{D} et \mathcal{P}		
sécants	parallèles	
 <p>\mathcal{D} et \mathcal{P} ont un seul point commun</p>	 <p>\mathcal{D} et \mathcal{P} n'ont aucun point commun</p>	 <p>\mathcal{D} est incluse dans le plan \mathcal{P}.</p>

c) Position relative de deux plans

Positions relatives des plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2		
sécants	parallèles	
 <p>leur intersection est la droite \mathcal{D}</p>	confondus	strictement parallèles ou disjoints
 <p>leur intersection est un plan</p>	 <p>leur intersection est vide</p>	

Exercice : déterminer l'intersection de plans sécants :

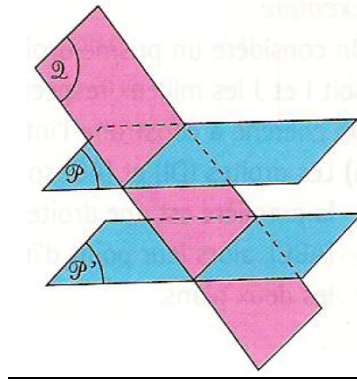
ABCD est un tétraèdre. I et J sont des points des arêtes [AB] et [CD]. Déterminer l'intersection des plans (ABI) et (CDJ).

V. Le parallélisme dans l'espace

a) parallélisme entre droites

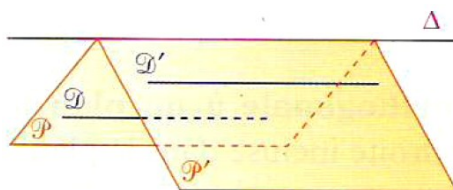
Propriété 1 :

Si P et P' sont deux plans parallèles, alors tout plan Q qui coupe P coupe aussi P' et les droites d'intersection sont parallèles.



Propriété 2 : (théorème du toit)

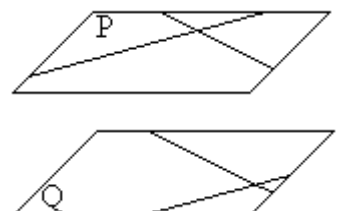
D et D' sont deux droites parallèles. P est un plan contenant D , et P' un plan contenant D' . Si, en outre, les plans P et P' sont sécants, alors la droite Δ d'intersection de ces plans est parallèle à D et à D' .



b) parallélisme entre plans

Propriété 3 :

Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan Q , alors les plans P et Q sont parallèles.



Propriété 4 :

Si deux plans P et P' sont parallèles à un même plan Q alors ces plans sont parallèles deux à deux.

c) parallélisme entre droite et plan**Propriété 5 :**

Si une droite d est parallèle à une droite d' , alors la droite d est parallèle à tout plan contenant la droite d' .

Propriété 6 :

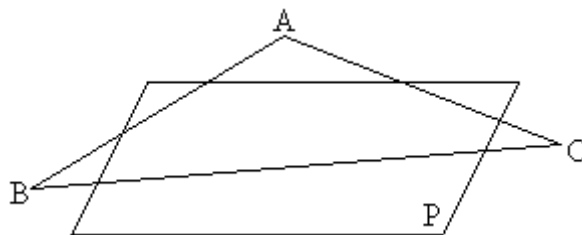
Si deux plans sont parallèles, alors toute droite de l'un des plans est parallèle à l'autre plan.

Exercice :

Soit un plan P et un triangle ABC tels que (AB) et (AC) soient parallèles à P .

a) Montrer que (BC) est parallèle à P .

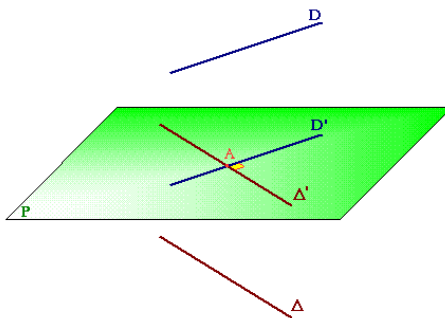
b) Montrer que la médiane du triangle ABC , issue de A , est parallèle à P .



VI. Orthogonalité

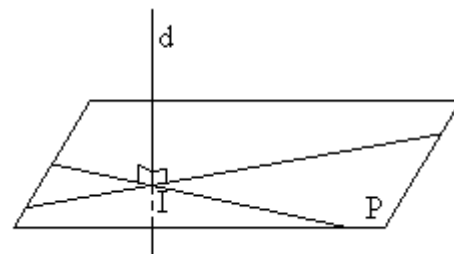
a) orthogonalité de deux droites de l'espace**Définition :**

Dire que deux droites D et Δ (non nécessairement coplanaires) sont **orthogonales** signifie que les parallèles à D' et Δ' menées par un point A quelconque sont perpendiculaires.

b) orthogonalité d'une droite et d'un plan**Définition :**

I est le point d'intersection d'une droite d et d'un plan P .

On dit que la droite d et le plan P sont **orthogonaux** si d est perpendiculaire à deux droites de P passant par I .

**Propriété 7 :**

Si une droite est orthogonale à un plan alors elle sera orthogonale à toute droite de ce plan.

Propriété 8 :

- Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles (démonstration en utilisant l'absurde).
- Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

Propriété 9 :

- Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles (démonstration en utilisant l'absurde).

c) plan médiateur**Définition :**

Soient A et B deux points. Le plan médiateur de $[AB]$ est le plan perpendiculaire à (AB) et passant par le milieu de $[AB]$.

Propriété 10:

Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points de l'espace équidistants de A et de B .