DM 4 : Géométrie plane
Correction

Dans cet exercice nous nous appuierons sur la définition suivante de la bissectrice : « la bissectrice d'un angle est son axe de symétrie ».

1)
[Oz) est la bissectrice de $\widehat{xOy}$, donc c'est son axe de symétrie et donc $\widehat{xOz}$ est l'image de $\widehat{zOy}$, or la symétrie conserve les angles donc $\widehat{xOz}$ = $\widehat{zOy}$. Une autre définition de la bissectrice d'un angle : c'est la droite qui coupe cet angle en deux angles égaux.
Soit M un point de [Oz) et P le point d'intersection entre [Ox) et sa perpendiculaire passant par M. Soit Q le symétrique de P par rapport à [Oz).

2)
Q est le symétrique du point P de [Ox) par rapport à [Oz) donc il doit être sur [Oy) l'image de [Ox). La symétrie conservant les angles on peut dire que $\widehat{OQM} = \widehat{OPM} = 90°$
MP est appelée la distance entre M et la droite (Oz), MQ est appelée la distance entre M et la droite (Oy), d'après les propriétés de la symétrie on peut en déduire que MP = MQ

3)

a) M est équidistant de [Ox) et [Oy) donc MP = MQ

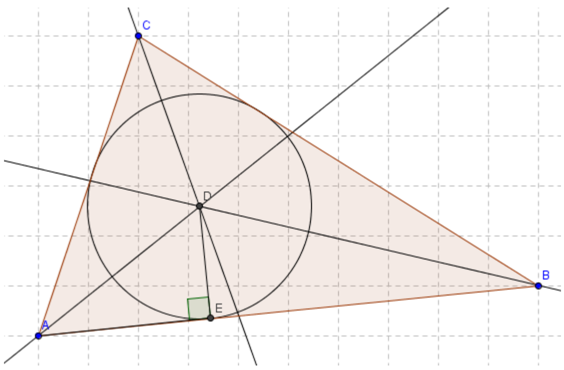
b) Dans les triangles OPM et OQM respectivement rectangles en P et Q on a $\widehat{xOM} = sin^{-1}\left(\frac{PM}{OM}\right)$ et $\widehat{yOM} = sin^{-1}\left(\frac{QM}{OM}\right)$, or MP=MQ et donc $\frac{PM}{OM} = \frac{QM}{OM}$ et donc $\widehat{xOM}$ = $\widehat{MOy}$

c) (OM) est donc d'après la définition trouvée à la question 1 la bissectrice de l'angle (OM).

Soit un angle $\widehat{xOy}$ et [Oz) sa bissectrice,
Si M ∈ [Oz) ⇔ M est équidistant des demi-droites bordant l'angle.

4)

a) I est sur la bissectrices de l'angle $\widehat{CAB}$, donc d'après la question 4 d(I , (AB)) = d(I , (AC))
b) I est sur la bissectrices de l'angle $\widehat{ABC}$, donc d'après la question 4 d(I , (AB)) = d(I , (BC))
c) d(I , (AB)) = d(I , (AC)) et d(I , (AB)) = d(I , (BC)) donc d(I , (BC)) = d(I , (AC))
d) le point I étant équidistant des droites (BC) et (AC) , il est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$.
e) les trois bissectrices d'un triangle, sont concourantes et elles se coupent en un point qui est situé à égale distance des trois côtés.



5)
On sait que d(I,(AB)) = d(I,(CB)) = d(I,(AC)) , or « si un cercle a pour rayon la distance entre son centre et une droite alors cette dernière et le cercle sont tangents », donc notre cercle est tangent aux trois côtés du triangle, **c'est le cercle inscrit**.