Configurations planes

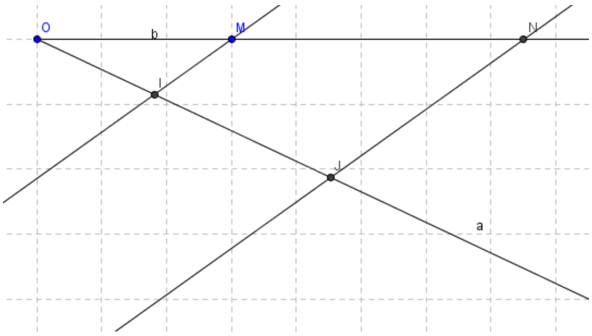
Exercice 1P153

1)a)Dans le triangle AQ'R' , la droite passant par Q et R points respectivement placés sur [AQ'] et [AR'] est parallèle au côté [Q'R'] donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{AR'}{AR}=\frac{AQ'}{AQ}=\frac{Q'R'}{QR}$ et donc plus particulièrement on a : $\frac{AR'}{AR}=\frac{AQ'}{AQ}$

b) si AQ'=4 alors on a : $\frac{5}{3}=\frac{4}{AQ}$ donc AQ = 2,4 et donc QQ' = AQ' – AQ = 4-2,4 = 1,6

2)a)Dans le triangle AP'R' , la droite passant par P et R points respectivement placés sur [AP'] et [AR'] est parallèle au côté [P'R'] donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{AR'}{AR}=\frac{AP'}{AP}=\frac{P'R'}{PR}$ et donc plus particulièrement on a : $\frac{P'R'}{PR}=\frac{AR'}{AR}$

b) si PR=3 alors on a : $\frac{P'R'}{3}=\frac{5}{3}$ donc P'R' = 5



Exercice 4P153

on a $\frac{OM}{ON}=\frac{OI}{OJ}$, $I \in [OJ]$ et $M \in [ON]$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès on sait que (IM) // (JN)

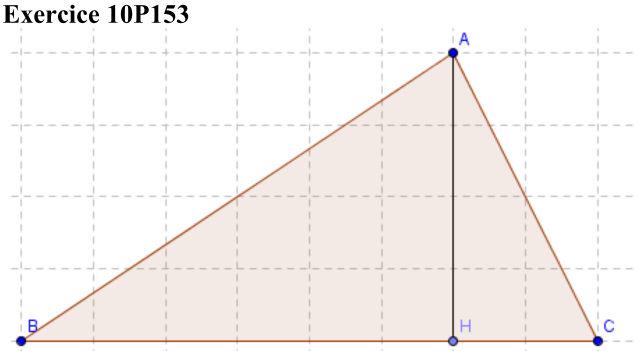
Exercice 6P153

G est le centre de gravité du triangle ABC donc (CC') est la médiane issue de C et donc C' est le milieu de [AB]. Donc AC'=2
Dans CAC' rectangle en A le théorème de Pythagore nous donne : CC'²= CA²+C'A² =3²+2² = 13donc $CC'=\sqrt{15}$
On sait que le centre de gravité est situé au deux tiers de chaque médiane en partant du sommet dont elles sont issues
Donc $CG=\frac{2}{3}\sqrt{15}$
Soit B' le point d'intersection entre (BG) et [AC]. Dans BAB' rectangle en A le théorème de Pythagore nous donne : BB'²= BA²+B'A² =4²+1,5² = 18,25 donc $CC'=\sqrt{18{,}25}$
On sait que le centre de gravité est situé au deux tiers de chaque médiane en partant du sommet dont elles sont issues
Donc $BG=\frac{2}{3}\sqrt{18{,}25}$

Exercice 9P153

ABC étant isocèle en A et I étant le milieu de [BC], les points A et I seront équidistants des extrémités de [BC] et donc par définition ils seront sur la médiatrice de ce segment , donc (AI) est la médiatrice de [BC] , elle coupe donc ce segment perpendiculairement. Elle sera donc aussi la hauteur issue de A. (AI) étant la médiatrice de [BC] alors la symétrie d'axe (AI) transforme B en C , et elle laisse les point A et I inchangé donc $\widehat{BAI}$ a pour image $\widehat{CAI}$, et la symétrie conservant les angles on aura : $\widehat{BAI}=\widehat{CAI}$. On peut donc conclure que (AI) est la droite qui coupe l'angle $\widehat{BAC}$ en deux angles égaux , c'est donc la bissectrice issue de A. I étant le milieu de [BC] , (AI) est la médiane issue de A.
Le centre de gravité, l'orthocentre, le centre du cercle inscrit et le centre du cercle circonscrit, sont respectivement sur (AI) la médiane issue de A, la hauteur issue de A, la médiatrice de [BC]et la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$, or ces quatre droites sont confondues et donc les quatre centre sont sur (AI).

Exercice 10P153



je note $\alpha=\widehat{CAH}$ et $\beta=\widehat{BAH}$ les deux angles sont adjacents donc $\widehat{BAC}=\widehat{BAH}+\widehat{CAH}$ or BAC est rectangle en A et donc $90=\alpha+\beta$

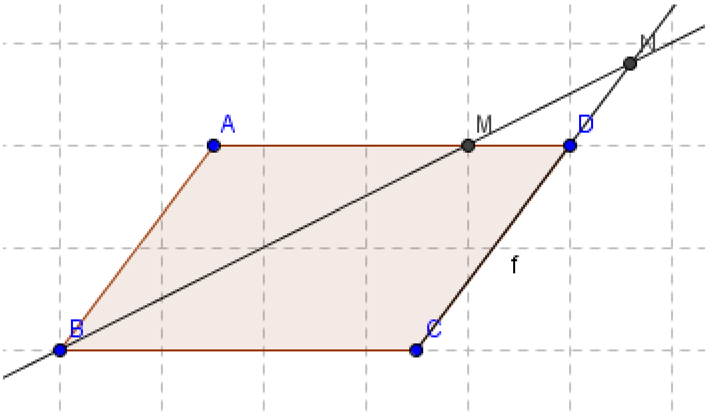
On sait que dans un triangle rectangle les angles aigus ont une somme qui vaut 90°
Donc $\widehat{CAH}+\widehat{ACH}$ =90° et donc $\widehat{ACH}$ =90-$\widehat{CAH}$=90- $\alpha=\beta$=$\widehat{BAH}$

Exercice 14P164

a) Les angles $\widehat{DBA}$ et $\widehat{ABC}$ sont adjacents et ils forment un angle plat ils sont donc supplémentaires : $\widehat{DBA}+\widehat{ABC}=180°$ et donc $\widehat{DBA}=180-\widehat{ABC}=180-60=120°$

les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux, et donc $\widehat{BAD} = \widehat{BDA}$ de plus la somme des angles d'un triangle vaut 180°
donc $2\widehat{BAD} = 180 - \widehat{DBA} \Leftrightarrow \widehat{BAD} = \frac{180-120}{2} \Leftrightarrow \widehat{BAD} = 30°$
$\widehat{BCA} = 180 - 90 - 60 = 30°$
Les angles $\widehat{ECA}$ et $\widehat{ACB}$ sont adjacents et ils forment un angle droit ils sont donc complémentaires : $\widehat{ECA} + \widehat{ACB} = 90°$ et donc $\widehat{ECA} = 180 - \widehat{ACB} = 90 - 30 = 60°$
Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux, et donc $\widehat{CAE} = \widehat{ECA}$ de plus la somme des angles d'un triangle vaut 180°
donc $2\widehat{CAE} = 180 - \widehat{ACE} \Leftrightarrow \widehat{CAE} = \frac{180-60}{2} \Leftrightarrow \widehat{CAE} = 60°$
b) $\widehat{DAB} et \widehat{BAC}$ sont adjacents, $\widehat{BAC}$ et $\widehat{EAC}$ aussi, donc on peut écrire :
$\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = 30 + 90 = 120°$ et
$\widehat{DAE} = \widehat{DAC} + \widehat{EAC} = 120 + 60 = 180°$, l'angle $\widehat{DAE}$ étant plat on peut dire que les points D, A et E sont alignés.
c)
on sait que dans un triangle rectangle le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit, il est à égale distance des trois sommets. A est sur l'hypoténuse et est à égale distance de C et de E (il est donc sur la médiatrice de [CE], or il n'existe qu'un seul point d'intersection entre cette médiatrice et l'hypoténuse, et ce point est le centre du cercle circonscrit. Ainsi A est le centre du cercle et est donc le milieu de [ED].

Exercice 20P154



on sait que deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires.
On a donc $\widehat{CBA} + \widehat{BAD} = 180°$
De plus and un triangle la somme des angles vaut 180°
Donc $\widehat{MBA} + \widehat{BAD} + \widehat{BMA} = 180°$
Ainsi $\widehat{MBA} + \widehat{BAD} + \widehat{BMA} = \widehat{CBA} + \widehat{BAD}$
$\Leftrightarrow \widehat{MBA} + \widehat{BMA} = \widehat{CBA}$
Or (BM) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CBA}$ donc
$\widehat{MBA} = \frac{1}{2}\widehat{CBA}$
Et donc $\frac{1}{2}\widehat{CBA} + \widehat{BMA} = \widehat{CBA}$
Donc $\widehat{BMA} = \frac{1}{2}\widehat{CBA}$ donc $\widehat{MBA} = \widehat{BMA}$
Le triangle BMA est donc isocèle en A.

Les angles $\widehat{BMA}$ et $\widehat{NMD}$ sont opposés par le sommet donc $\widehat{BMA} = \widehat{NMD}$
les droites parallèles (BA) et (CD) sont coupées par (AD) formant ainsi un couple d'angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{MDN}$ égaux
et par (BN) ainsi un couple d'angles $\widehat{MBA}$ et $\widehat{BNC}$ égaux
ainsi $\widehat{BMA} = \widehat{NMD}$ et $\widehat{MBA} = \widehat{BNC}$ or on a montré précédemment que $\widehat{MBA} = \widehat{BMA}$ et donc $\widehat{NMD} = \widehat{BNC}$ et donc MND est isocèle en D.

Exercice 22P154
ABCD et DCFE sont des parallélogrammes donc en déduit respectivement que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$, on peut en déduire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ et donc ABFE est un parallélogramme.
Remarque on aurait pu faire l'exercice sans les vecteurs en parlant de parallélisme et d'égalité de longueur entre les ségments correspondant aux vecteurs utilisés plus haut.

Exercice 27P155
Les angles $\widehat{AEB}$ et $\widehat{CED}$ sont opposés par le sommet donc $\widehat{AEB} = \widehat{CED} = 120°$
Ainsi $\widehat{EAB} = 180° - \widehat{AEB} - \widehat{ABE} = 180-120 - 20 = 40°$
Dans le cercle C les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{BD}$, donc ils sont égaux , donc
$\widehat{BCD} = \widehat{BAD} = 180 - \widehat{AEB} - \widehat{ABE} = 40°$

Exercice 28P155
1) [OA] et [OB] sont deux rayons du cercle C , ils ont donc la même mesure, donc OA=OB. [OA'] et [OB'] sont deux rayons du cercle C , ils ont donc la même mesure, donc OA'=OB'.
2) Les points O et O' sont équidistants des points A et B , donc ils sont sur la médiatrice de [AB], ainsi (OO') coupe [AB] perpendiculairement en son milieu.

Exercice 29P155
1) [MA] est un diamètre de C, et B est un point de ce cercle, or « tout triangle qui a un de ses côté qui est diamètre de son cercle circonscrit est rectangle », donc AMB est rectangle en B. [NA] est un diamètre de C', et B est un point de ce cercle, or « tout triangle qui a un de ses côté qui est diamètre de son cercle circonscrit est rectangle », donc ANB est rectangle en B.
2) (MB) et (BN) sont toute deux perpendiculaire à (AB) et donc elles sont parallèles, de plus elles passent par un même point B, donc elles sont confondues, les points M, B et N sont donc alignés.

Exercice 31 à 33 P155

Il faut utiliser la formule suivante $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ pour chacun des trois côtés. La réciproque de pythagore ou sa contraposée permettront de dire si oui ou non le triangle est rectangle.

Exercices 35 à 39

On peut calculer la mesure des quatre côtés, et si on a un losange on peut aussi calculer celles des diagonales , si les deux sont de même mesure alors le losange est aussi rectangle et donc on a bien à faire à un carré.

Exercice 40P155

Les perpendiculaires à (AC) passant respectivement par D et B coupent la droite respectivement en H et H'

Ainsi $A_{ADE} = DH.\frac{AE}{2}$ $A_{DEC} = DH.\frac{CE}{2} = DH.\frac{AE}{2} = A_{ADE}$ et $A_{BEC} = BH'.\frac{CE}{2} = BH'.\frac{AE}{2} = A_{ABE}$

On aura donc $A_{Verte} = A_{ABE} + A_{DEC} = A_{BEC} + A_{ADE} = A_{Blanche}$

Exercice 42P156

a) La droite passant par les deux points , et la médiatrice du segment ayant pour extrémités les deux points.
b) N'importe quelle perpendiculaire au deux droites. La parallèle équidistante des deux droites.
c) Les deux droites elles mêmes

Exercice 43P156

a) ABCD étant un parallélogramme, ses diagonales se coupent en leur milieu O, donc la symétrie de centre O envoie A en C, B en D, C en A et D en B.
b) N est l'intersection de (AM) et de d' l'image de d par la symétrie.
c) (d) s'appelle aussi (AM) , or A et M on respectivement pour image C et N , donc (d) a pour image (CN)
d) P point de (d) aura son image par la symétrie de centre O sur (CN) l'image de (d) , de plus P sera sur la droite (OP) , il suffit donc de tracer cette dernière et de noter P' son point d'intersection avec la droite (CN)

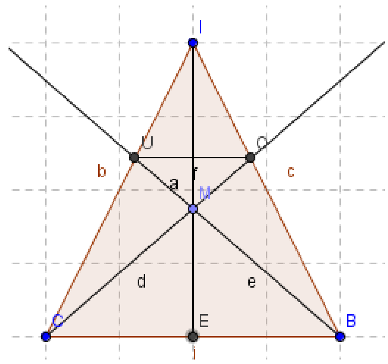
Exercice 48P156

1)a) Δ est la médiatrice des segments [AB] et [CD] et donc elle coupe ces segment perpendiculairement en leur milieu. Ces deux derniers étant perpendiculaires à la même troisième elles sont parallèles. De plus par la symétrie d'axe Δ notée s_Δ , A a pour image B, C a pour image D et donc [AC] a pour image [BD], et [AD] a pour image [BC]. La symétrie conservant les longueurs on aura donc AC=BD et AD=BC.

ABCD ou ABDC est non croisé, donc comme [AB] // [CD] on peut dire que c'est un trapèze, de plus comme AD=BC et AC=BD , ce trapèze est isocèle.

b) Une diagonale a pour image l'autre diagonale. Soit O leur point d'intersection.

Prouvons que O n'est pas sur Δ , on appellera O' l'image de O par la symétrie d'axe Δ , comme O est sur la première diagonale O' sera sur la seconde, comme O est aussi sur la seconde, O' sera aussi sur la première et donc O' est un point commun au deux diagonales, donc O et O' sont confondus, donc O est un point invariant, et donc il est sur l'axe Δ.



2) E et I sont des points équidistants de B et C. donc (IE) est la bissectrice de [BC] c'est aussi un axe de symétrie du triangle. Par la symétrie d'axe (IE) , I , M et E sont invariants et B a pour image C (et vice versa)

(CM) a donc pour image (BM), et donc O l'intersection de (CM) et (IB) aura pour image U l'intersection de (CM) et (IB).

On peut donc facilement démontrer que (UO) est parallèle à (CB) et que [UC] a pour image [OB] et donc que UC=OB et donc que le trapèze est isocèle

.